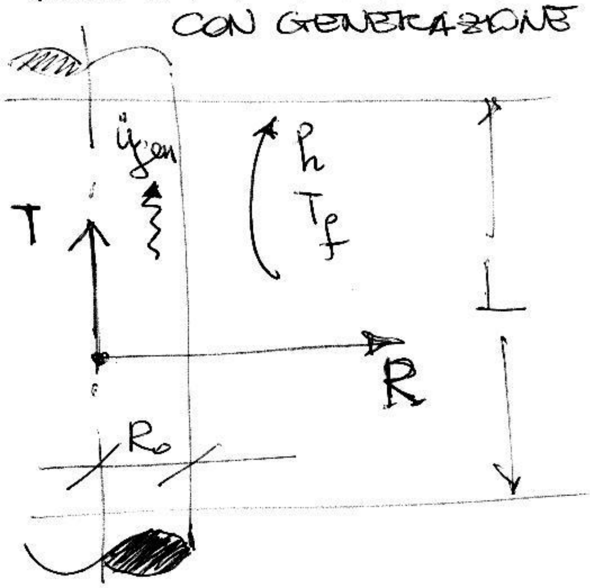
SIMMETRIA CILINDRICA CON GENERAZIONE

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial T}{\partial R}\right) = -\frac{\dot{u}_{gen}}{k} \qquad 1$$



$$R\frac{\partial T}{\partial R} = -\frac{\dot{u}_{gen} R^2}{2k} + C_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} = -\frac{\dot{u}_{gen} R}{2k} + \cancel{\frac{C_1}{R}}$$

$=0$ per la simmetria

$$T = -\frac{\dot{u}_{gen} R^2}{2k}\cdot\frac{1}{2} + C_2$$

la condizione al contorno residua consente di eliminare la II costante di integrazione:

$$-k\left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_0} = h\left(T(R_0) - T_f\right)$$

$$\frac{\dot{u}_{gen} R_0}{2} = h\left(-\frac{\dot{u}_{gen} R_0^2}{4k} + C_2 - T_f\right) \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\dot{u}_{gen} R_0}{2h} + \frac{\dot{u}_{gen} R_0^2}{4k} + T_f = C_2}$$

In definitiva il profilo di temperatura è

$$T(R) = \frac{\dot{u}_{gen} R_0^2}{4k}\left[1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right] + \frac{\dot{u}_{gen} R_0}{2h} + T_f \qquad (1)$$

Dalla (1) segue

$$\dot{Q} = -k\frac{\partial T}{\partial R}2\pi R L = \frac{\dot{u}_{gen} R}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi R L = \dot{u}_{gen} R_0^2 L \pi \qquad (2)$$

Con riferimento all'esercizio C3 se la sez è 1 mm^2 ne consegue che il raggio è ②

$$R_o = \left[Area/\pi \right]^{1/2} = 5{,}64 \cdot 10^{-4}\, m = 0{,}564\, mm \qquad (3)$$

Il volume è

$$V = Area \cdot L = 10^{-6}\, m^3 \qquad (4)$$

La resistenza elettrica è

$$R_{el} = \rho_{el} \frac{L}{Area} = \underset{\Omega\, m}{0{,}0175 \cdot \cancel{10^{-6}}} \cdot \frac{1}{\cancel{10^{-6}}\ \frac{m}{m^2}} = 0{,}0175\, \Omega$$

$$\dot{u}_{gen} = \frac{R_{el} I_{max}^2}{V} = \frac{0{,}0175 \cdot 25}{10^{-6}} = 4{,}37 \cdot 10^{5}\ \frac{W}{m^3}$$

La potenza dissipata all'interfaccia con l'aria è calcolabile sia come

$$\dot{Q} = -K \left.\frac{\partial T}{\partial R}\right|_{R=R_o} (2\pi R_o) L \qquad (5)$$

che come

$$\dot{Q} = \dot{u}_{gen} V = 0{,}43\, W \qquad (6)$$

La potenza specifica è quindi

$$\frac{\dot{Q}}{Area} = \frac{0{,}43}{2\pi R_o L} = \frac{0{,}43}{2\pi\ 564 \cdot 10^{-4}} = 123\ \frac{W}{m^2}$$

3

Tornando alla (1) e passando ai valori numerici si ricava

$$T(0) = 50.1^\circ C \; ; \; T(R_o) = 50.1^\circ C$$

Cioè la temperatura è costante, di fatto, nel cavo. Ciò non sorprende considerando lo spessore ridotto e l'elevata conducibilità del cavo.

L'esercizio C4 si fonda sul precedente e vuol mostrare un fatto in prima battuta inaspettato: se si isola il cavo si ottiene una diminuzione della sua temperatura.

L'energia si conserva nel cavo → profilo parabolico

NB: il cavo è identificato con il pedice "1".

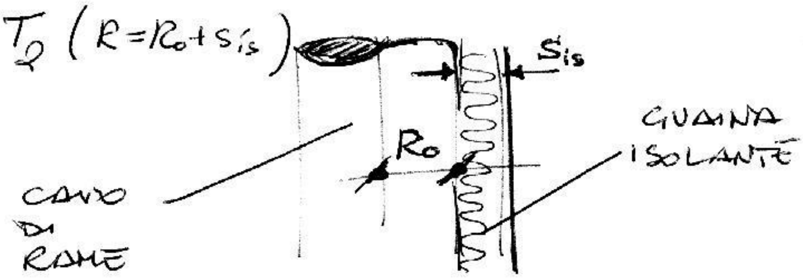
$$T_1(R) = -\frac{u_{gen} R_o^2}{4 k_1} + C_2 \quad (7)$$

$0 \leq R \leq R_o$

L'energia si conserva nella guaina → profilo logaritmico. La guaina è identificata con il pedice "2" e si è posto $T_e = T_2(R = R_o + s_{is})$

$$T_2(R) = T_{R_o} + (T_e - T_{R_o}) \frac{\ln\left[\frac{R}{R_o}\right]}{\ln\left[\frac{R_o + s}{R_o}\right]} \quad (8)$$

$R_o \leq R \leq R_o + s_{is}$



4

Si noti che le (7) e (8) esibiscono 3 costanti di integrazione avendo già sfruttato la condizione di simmetria. Allo scopo di determinare le 3 costanti si ricorre alle tre cond. ulteriori di cui 2 di accoppiamento ed una di III tipo all'interfaccia isolante/aria.

$$\begin{cases} k_1 \left.\dfrac{\partial T_1}{\partial R}\right|_{R=R_0} = k_2 \left.\dfrac{\partial T_2}{\partial R}\right|_{R=R_0} & (9) \\ T_1(R=R_0) = T_2(R=R_0) & (10) \end{cases}$$

$$-k_2 \left.\frac{\partial T_2}{\partial R}\right|_{R=R_0} = h\left(T_2(R=R_0+S_{is}) - T_f\right) \quad (11)$$

Risolvendo nelle tre incognite c_2, T_{R_0} e T_e si ottiene:

$$\begin{cases} c_2 = 45.64\ °C \\ T_{R_0} = 45,64\ °C \\ T_e = 45,57\ °C \end{cases}$$

ancora una volta le differenze di temperature nel rame sono del tutto inapprezzabili; ma anche attraverso l'isolante, dato il suo piccolo spessore, queste risultano estremamente piccole e praticamente insignificanti. Si nota come il livello di temperatura raggiunto dal rame sia inferiore a quello del caso precedente.

5

Anche in questo caso tutta l'energia generata nel cavo di rame 0,43 W deve essere ~~##~~ scaricata all'aria esterna per cui

$$\dot{Q} = 0{,}43 \ W \qquad (12)$$

Sarà però diversa la superficie attraverso cui lo scambio ha luogo:

$$\text{Area}_{\text{esterna isolante}} = 2\pi (R_o + s_{is}) L = 4{,}1 \cdot 10^{-3} \ m^2$$

Di conseguenza sarà diverso il flusso termico specifico

$$\dot{q} = \frac{0{,}43}{4.1 \cdot 10^{-3}} = 104.8 \ \frac{W}{m^2}$$

Si poteva pervenire agli stessi risultati anche sfruttando l'analogia elettrica limitatamente all'isolante. Lo schema equivalente è riportato sotto. Risulta:

$$T_{Ro} - T_f = \dot{Q} \left[R_k + R_h \right] \qquad (13)$$

Poiché $\dot{Q}$ è noto dalla (13)

e $R_h = 1/[h L 2\pi (R_o + s_{is})] = 58{,}44 \ \frac{K}{W}$

e $R_k = \frac{s_{is}}{k_{is} \, 2\pi R_m L} = 0{,}16 \ \frac{K}{W}$

si ottiene $T_{Ro} = 45.64 \ °C$.