

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Corso di

Trasmissione del calore

Docente Prof.Ing. G.Cuccurullo

a.a. 2002/03

Metodo integrale

**INSTABILITÀ TERMICA
IN UN CONDUTTORE ELETTRICO**

Pucciariello Mauro
Mat. 165/88

Palagano Nicola
Mat. 165/16

INDICE

1.	DESCRIZIONE DEL PROBLEMA	3
2.	SCHEMATIZZAZIONE DI UN CONDUTTORE	5
3.	CONDUTTORE CON GENERAZIONE INTERNA COSTANTE	7
	Condizioni al contorno di I e II tipo.....	7
	Condizioni al contorno di II e III tipo	9
4.	CONDUTTORE CON GENERAZIONE INTERNA NON COSTANTE.....	15
5.	SOLUZIONI APPROSSIMATE: METODO INTEGRALE.....	16
	Condizioni al contorno di I e II tipo.....	16
	Condizione di stabilità	20
	Condizioni al contorno di II e III tipo	21
	Condizione di stabilità	26
6.	SOLUZIONI ESATTE :FUNZIONI DI BESSEL.....	27
	Condizioni al contorno di I e II tipo.....	27
	Condizione di stabilità	33
	Condizioni al contorno di II e III tipo	34
	Condizione di stabilità	38
7.	CONFRONTO FRA SOLUZIONI APPROSSIMATE E SOLUZIONI ESATTE	40
	Condizioni al contorno di I e II tipo.....	40
	Condizioni al contorno di II e III tipo	44
8.	ESEMPIO NUMERICO	46
	Condizioni al contorno di I e II tipo.....	47
	Condizioni al contorno di II e III tipo	48

1. DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

E' noto che un conduttore attraversato da corrente elettrica diventa sede di fenomeni dissipativi di tipo termico (funzione, secondo la legge di Joule, del quadrato dell'intensità della corrente); ne consegue un innalzamento della temperatura. In particolare un conduttore di resistenza R , attraversato da una corrente d'intensità I , produce, per effetto Joule, una dissipazione d'energia per unità di tempo \dot{U}_{gen} pari a:

$$\dot{U}_{gen} = RI^2 \text{ [W]}$$

Conoscendo la resistività ρ [Ω m] del materiale (supposto omogeneo), la lunghezza L e la sezione A (supposta costante) del conduttore, R si può esprimere come:

$$(i) \quad R = \rho(L/A) \text{ [\Omega]}$$

Quindi l'energia dissipata dall'intero conduttore è data da:

$$\dot{U}_{gen} = \rho \frac{L}{A} I^2$$

Introducendo il vettore densità di corrente elettrica e supponendo che sia uniforme su tutta la superficie e normale a $d\mathbf{A}$, si può scrivere:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = JA \Rightarrow J = \frac{I}{A} \text{ [A m}^{-2}\text{]}$$

In queste ipotesi si può facilmente ricavare la generazione d'energia termica *per unità di volume e di tempo* come:

$$\dot{u}_{gen} = \frac{\dot{U}_{gen}}{L \cdot A} = \rho \cdot J^2 \text{ [J m}^{-3}\text{ s}^{-1}\text{]}$$

Nell'ipotesi fatta, cioè di conduttore omogeneo e corrente uniforme, anche \dot{u}_{gen} è uniforme. Si può vedere attraverso un'analisi delle unità di misura che effettivamente \dot{u}_{gen} è un'energia per unità di volume e di tempo:

$$[\Omega \text{ m A}^2 \text{ m}^{-4}] = [\Omega \text{ A m}^{-3}] = [\text{W m}^{-3}] = [\text{J s}^{-1} \text{ m}^3]$$

La resistività è una proprietà caratteristica del materiale e come tutte le proprietà fisiche varia al variare della temperatura. In effetti, l'aumento della temperatura per effetto Joule provoca un'alterazione della resistività del materiale e di conseguenza della variazione della resistenza del conduttore. In molti casi pratici la variazione di ρ con la temperatura si può trascurare e quindi la generazione d'energia oltre ad essere uniforme risulta anche *costante*.

In altri casi occorre tener conto della variazione della resistività al fine di evitare fenomeni d'instabilità termica che possono sorgere nel conduttore. Con riferimento ai conduttori

metallici, la resistività aumenta all'aumentare della temperatura, ciò produce un aumento della resistenza e quindi dell'energia dissipata, che a sua volta si traduce in un innalzamento della temperatura. In queste condizioni può aver luogo un fenomeno d'instabilità termica, *thermal runaway*, dovuto al fatto che all'aumentare della temperatura aumenta ρ e quindi \dot{u}_{gen} il che conduce a sua volta ad un aumento della temperatura e ad un nuovo aumento di. Per evitare il danneggiamento del conduttore bisogna quindi studiare lo scambio termico che lo interessa tenendo conto della variazione di ρ con la temperatura.

La relazione fra temperatura e resistività per i materiali metallici in generale, è pressoché lineare su un intervallo di temperatura abbastanza ampio, quindi si può approssimare con una serie di Taylor arrestata al primo ordine a partire da un punto di riferimento. Quindi detta T_0 una temperatura di riferimento e ρ_0 la resistività a quella temperatura:

$$\rho(T) = \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} (T - T_0)$$

Assumendo:

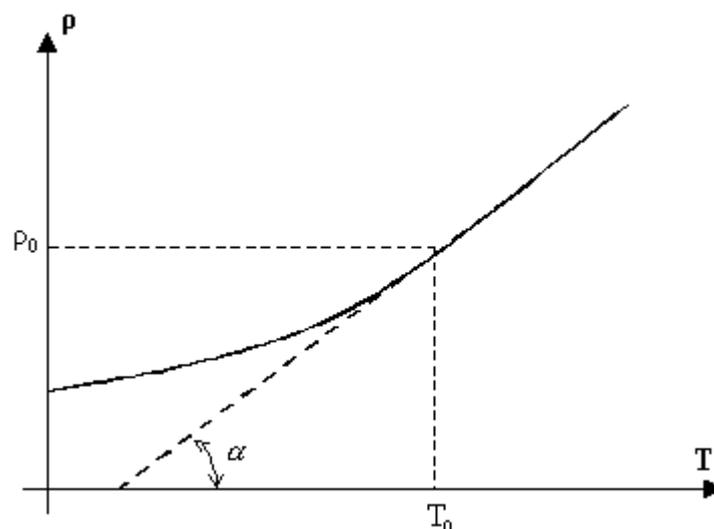
$$\beta = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} = \tan(\alpha)$$

Si può scrivere:

$$\rho = \rho_0 + \beta(T - T_0)$$

Quindi la generazione interna d'energia è data da:

$$\dot{u}_{gen}(T) = \rho_0 J^2 + \beta J^2 (T - T_0)$$



Il valore di β non è altro che la pendenza della retta che approssima la curva $\rho-T$. Ovviamente per $\beta=0$, la retta risulta parallela all'asse della temperatura e quindi la resistività risulta costante. In genere la retta teorica si discosta dalla curva reale per valori più bassi della temperatura ambiente e mostra una tendenza alla saturazione.

2. SCHEMATIZZAZIONE DI UN CONDUTTORE

Un conduttore elettrico è schematizzabile come un cilindro pieno di lunghezza molto maggiore del raggio quindi lo scambio termico che lo interessa si può studiare con riferimento all'equazione della conduzione in geometria cilindrica, che assumendo le ipotesi di:

1. Flusso mono-dimensionale radiale;
2. Mezzo isotropo nei confronti della conducibilità termica;
3. Modello di solido perfetto;
4. Mezzo omogeneo nei confronti della conducibilità termica;
5. Flusso stazionario.

è data da:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{dT}{dR} \right] + \frac{\dot{u}_{gen}}{k} = 0$$

Si tratta di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, quindi abbiamo bisogno, per definire il problema, di due condizioni al contorno sulla funzione T.

Una prima ipotesi è di imporre la temperatura sulla parete del cilindro ad un valore fissato T_e , quindi, detto R_e il raggio esterno del conduttore, si avrà la condizione detta di **I tipo**:

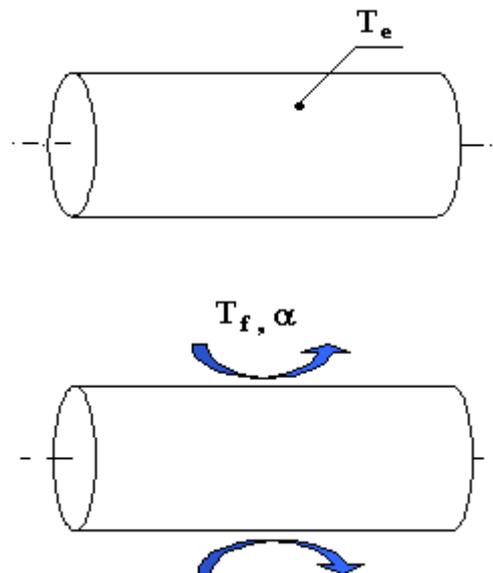
$$T(R = R_e) = T_e$$

Una seconda ipotesi è di considerare il cilindro immerso in un fluido in movimento a temperatura T_f , col quale scambia calore in virtù della differenza di temperatura tra fluido e cilindro stesso. Da un bilancio d'energia scaturisce la condizione al contorno detta di **III tipo**:

$$-k \left. \frac{dT}{dR} \right|_{R=R_e} = \alpha (T(R = R_e) - T_f)$$

con α coefficiente medio di scambio termico convettivo.

Definita la prima condizione al contorno come una di I o III tipo, la seconda si può far derivare dalla "simmetria" del problema. Il conduttore in esame presenta una simmetria fisica, tipica dei solidi di rivoluzione, ed una simmetria di carico termico. Le condizioni termiche cui il conduttore è sottoposto sono, infatti, uniformi su tutta la parete, come si può capire dalle precedenti condizioni al contorno, dunque ogni punto sulla parete si trova nelle stesse



condizioni termiche d'ogni altro punto ed in particolare del suo simmetrico rispetto all'asse del cilindro.

Poiché il materiale è omogeneo, questa situazione si conserva all'interno del materiale, perciò l'andamento della temperatura lungo un generico diametro sarà simmetrica rispetto all'asse centrale. Questa simmetria naturalmente si ritrova sul flusso termico, cioè il flusso termico, diretto radialmente, che fuoriesce da un generico punto del conduttore, sarà bilanciato dal flusso termico che fuoriesce dal punto simmetrico rispetto all'asse.

$$\dot{q}(R) = \dot{q}(-R)$$

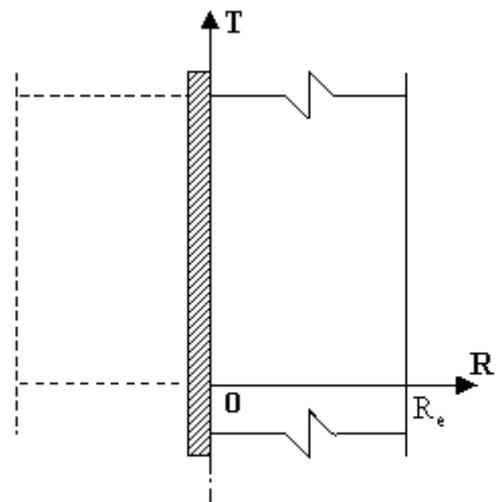
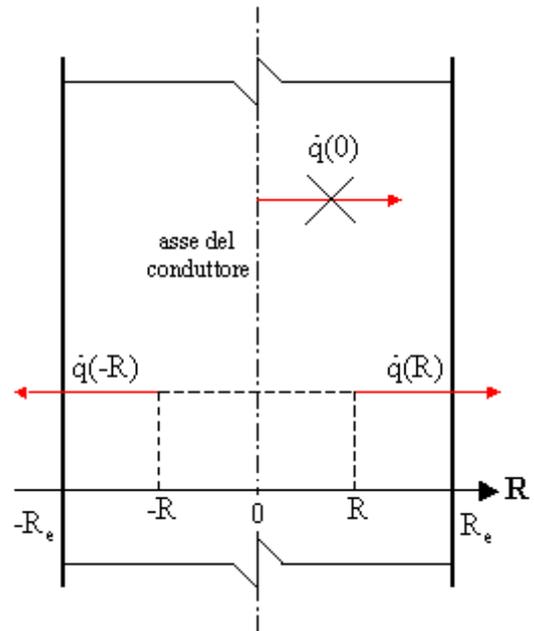
Questa considerazione è di fondamentale importanza perché ci consente di pervenire alla seconda condizione al contorno. Se vi fosse un flusso termico che fuoriesce da un punto di coordinata $R=0$, cioè un punto dell'asse di simmetria del conduttore, la condizione di simmetria termica non potrebbe più essere soddisfatta perché non ci sarebbe nessun punto in grado di bilanciare questo flusso. Per tale motivo deve risultare:

$$\dot{q}|_{R=0} = 0$$

Da cui deriva la condizione al contorno di II tipo:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{R=0} = 0$$

La condizione al contorno di **II tipo**, interpretabile anche come condizione di adiabaticità della sezione a $R=0$, è indicata graficamente con una zona tratteggiata, inoltre, stante la simmetria, in seguito nel tracciare i profili di temperatura si riporterà solo uno dei due tratti simmetrici, con l'asse della temperatura coincidente con l'asse di simmetria.



3. CONDUTTORE CON GENERAZIONE INTERNA COSTANTE

Consideriamo il caso in cui la generazione interna d'energia termica oltre ad essere uniformemente distribuita sia costante, quindi indipendente dalla temperatura.

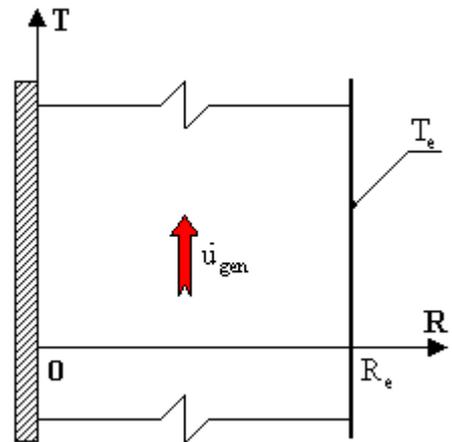
Condizioni al contorno di I e II tipo

Le equazioni che governano il problema sono:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dT}{dR} \right) + \frac{\dot{u}_{gen}}{k} = 0$$

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{R=0} = 0$$

$$T(R = R_e) = T_e$$



Procediamo con l'adimensionalizzazione del problema, ricercando delle grandezze costanti cui fare riferimento. Per quanto riguarda la variabile spaziale, la grandezza di riferimento c'è fornita esplicitamente dal problema ed è il raggio esterno del conduttore, per la temperatura, invece, non riusciamo ad individuare a priori una quantità caratteristica del problema ma il suo valore ci viene "suggerito" dal processo stesso di adimensionalizzazione. Definiamo quindi le variabili adimensionali come:

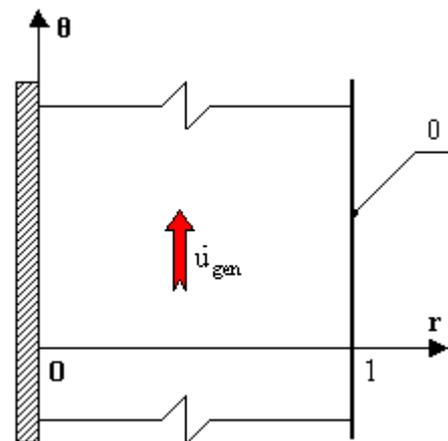
$$r = \frac{R}{R_e} \quad \theta = \frac{T - T_e}{\Delta T_{rif}} \quad \Delta T_{rif} = \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{k}$$

In questo modo il problema adimensionale è espresso dalle equazioni:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\theta(r = 1) = 0$$



Risolvendo il problema adimensionale si trova : $\theta(r) = \frac{1}{4}(1 - r^2)$

e tornando al dimensionale : $T(R) = T_e + \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{R_e^2} \right)$

L'andamento della temperatura è quindi di tipo *parabolico*, con valore minimo sulla parete e valore massimo in corrispondenza dell'asse del conduttore:

$$\theta_{\min} = \theta(r=1) = 0$$

$$T_{\min} = T(R=R_e) = T_e$$

$$\theta_{\max} = \theta(r=0) = \frac{1}{4}$$

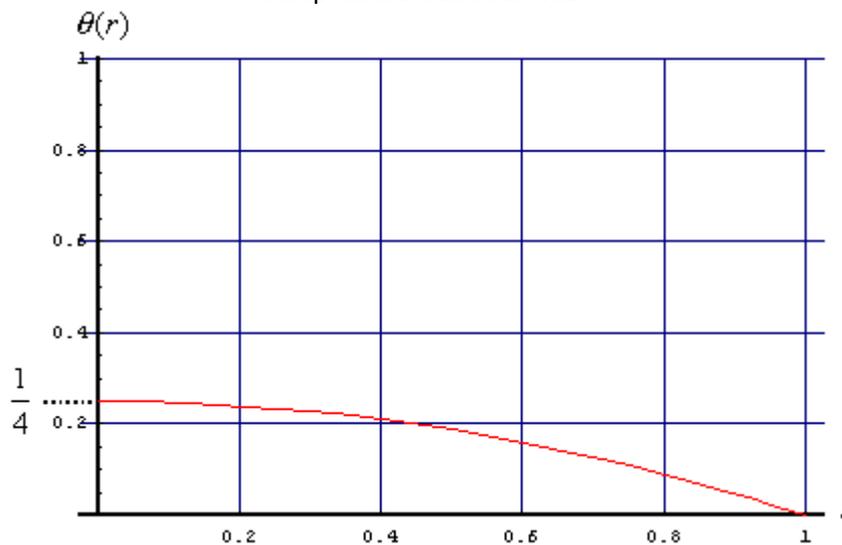
$$T_{\max} = T(R=0) = T_e + \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k}$$

Soffermandoci sul valore di ΔT_{rif} , scaturito da considerazioni di tipo formale, possiamo trovare per esso un significato anche sul piano fisico. Possiamo ricavare, infatti, che :

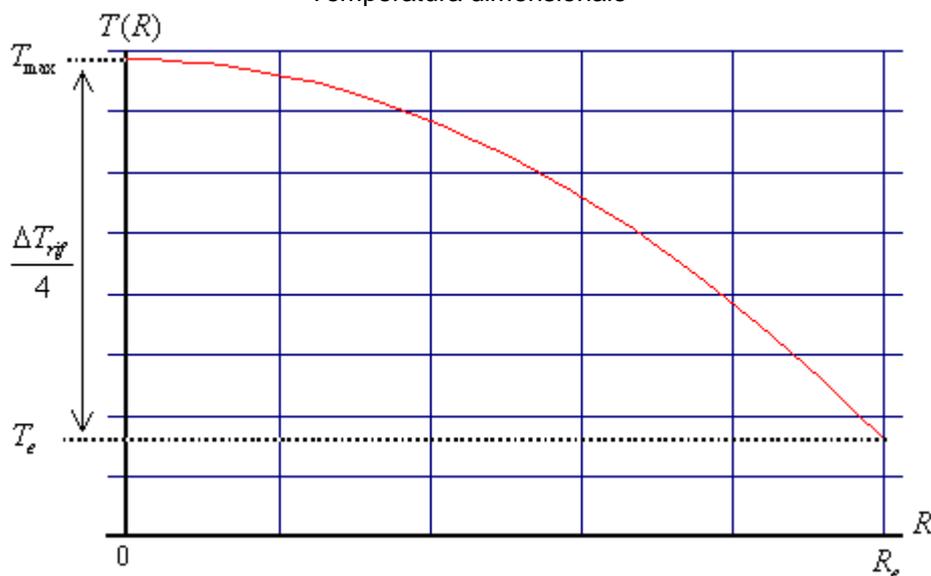
$$\Delta T_{\max} = T_{\max} - T_e = \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} = \frac{\Delta T_{rif}}{4} \Rightarrow \Delta T_{rif} = 4 \cdot \Delta T_{\max}$$

Il salto di temperatura preso a riferimento risulta essere il quadruplo del salto massimo che si riscontra nel conduttore, cioè il salto termico fra l'asse e la parete del conduttore.

Temperatura adimensionale



Temperatura dimensionale



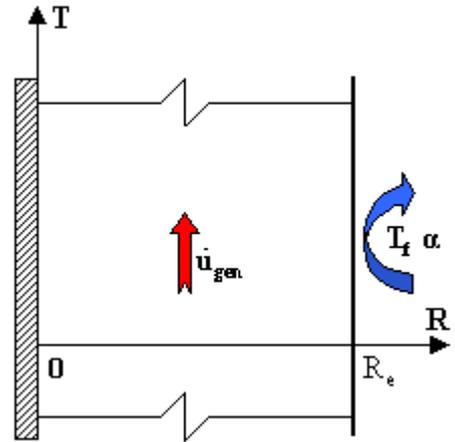
Condizioni al contorno di II e III tipo

Le equazioni che governano il problema sono:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dT}{dR} \right) + \frac{\dot{u}_{gen}}{k} = 0$$

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{R=0} = 0$$

$$\left. -k \frac{dT}{dR} \right|_{R=R_e} = \alpha (T(R=R_e) - T_f)$$



Procediamo anche in questo caso con l'adimensionalizzazione assumendo:

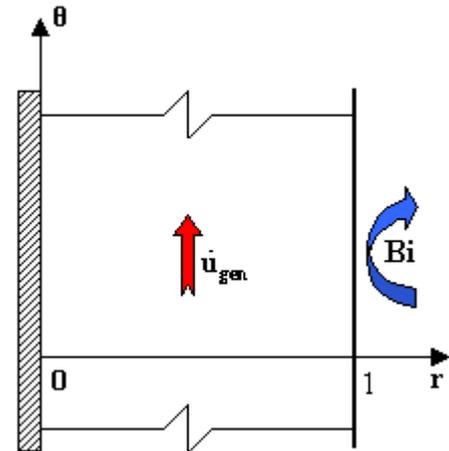
$$\theta = \frac{T - T_f}{\Delta T_{rif}} \quad r = \frac{R}{R_e} \quad \Delta T_{rif} = \frac{R_e^2 \dot{u}_{gen}}{k}$$

In questo modo il problema adimensionale risulta essere definito come:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} = -Bi \cdot \theta(r=1)$$



Dove Bi è il numero di Biot, gruppo adimensionale pari a:

$$Bi = \frac{\alpha R_e}{k}$$

Risolvendo il problema adimensionale si trova :

$$\theta(r) = \frac{1}{4} \left(\frac{Bi+2}{Bi} - r^2 \right)$$

Riportando la soluzione in dimensionale :

$$T(R) = \left(1 - \frac{R^2}{R_e^2} \right) \cdot \frac{\Delta T_{rif}}{4} + \frac{\Delta T_{rif}}{2Bi} + T_f$$

e sostituendo le espressioni di ΔT_{rif} e di Bi :

$$T(R) = \left(1 - \frac{R^2}{R_e^2} \right) \cdot \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} + \frac{\dot{u}_{gen} R_e}{2\alpha} + T_f$$

Anche in questo caso l'andamento della temperatura all'interno del conduttore è di tipo parabolico, con valori massimo e minimo pari a:

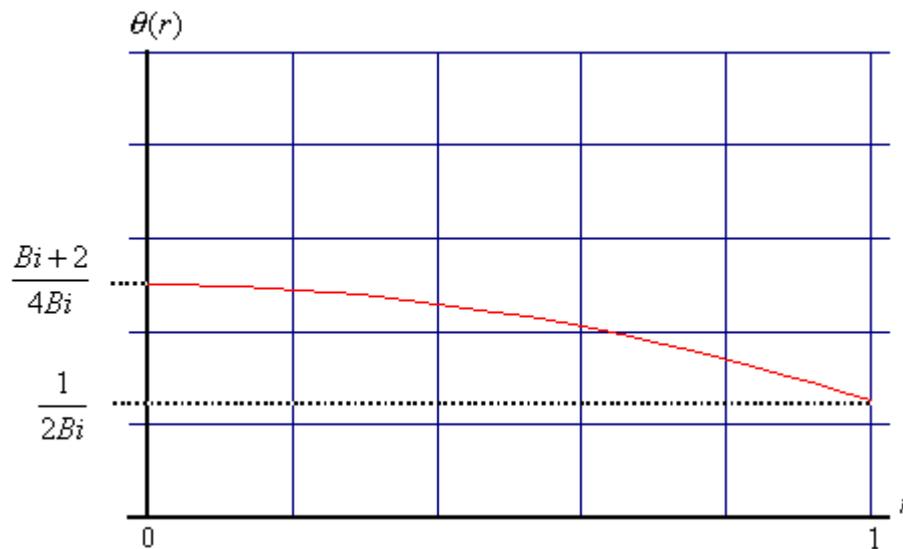
$$\theta_{\max} = \theta(r=0) = \frac{Bi+2}{4Bi} \quad T_{\max} = T(R=0) = \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} + \frac{\dot{u}_{gen} R_e}{2\alpha} + T_f$$

$$\theta_{\min} = \theta(r=1) = \frac{1}{2Bi} \quad T_{\min} = T(R=R_e) = \frac{\dot{u}_{gen} R_e}{2\alpha} + T_f$$

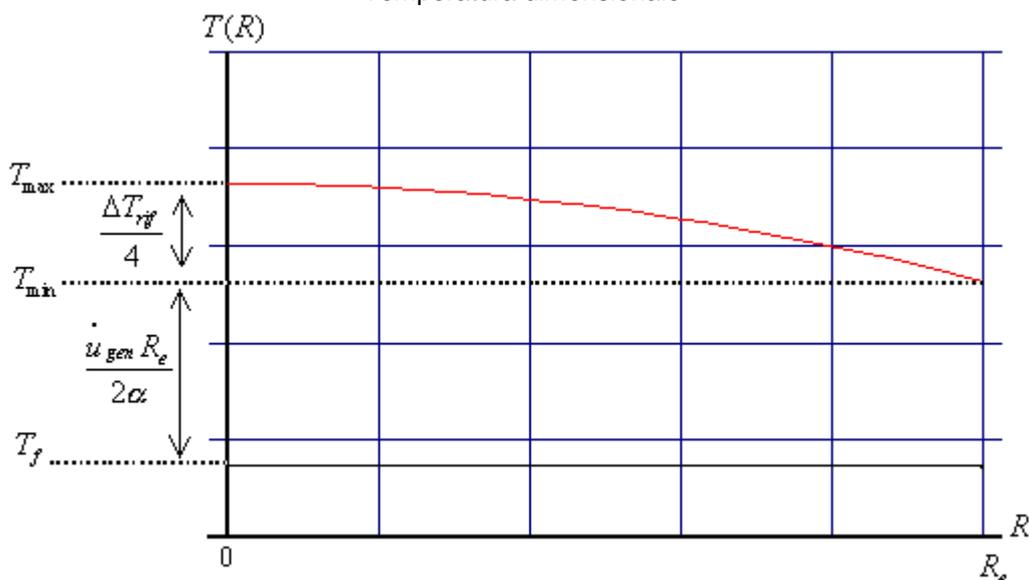
Contrariamente a quanto veniva in precedenza, $T_{\min} > T_f$, mentre resta inalterato il significato fisico del ΔT_{rif} , ancora pari al quadruplo del salto massimo di temperatura che si registra nel conduttore:

$$\Delta T_{\max} = T_{\max} - T_e = \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} = \frac{\Delta T_{rif}}{4} \Rightarrow \Delta T_{rif} = 4 \cdot \Delta T_{\max}$$

Temperatura adimensionale



Temperatura dimensionale



Notiamo come per $\alpha \rightarrow \infty$, ovvero per $Bi \rightarrow \infty$, $\theta(r)$ e $T(R)$ tendono alle distribuzioni di temperatura che avevamo trovato con la condizione di I tipo in luogo di quella di III tipo:

$$\begin{aligned} \lim_{Bi \rightarrow \infty} \theta(r) &= \\ &= \lim_{Bi \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{Bi+2}{Bi} - r^2 \right)^H = \\ &= \lim_{Bi \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (1-r^2) = \frac{1}{4} (1-r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} T(R) &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{R^2}{R_e^2} \right) \cdot \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} + \frac{\dot{u}_{gen} R_e}{2\alpha} + T_f \right] = \\ &= \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2} \right) \cdot \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} + T_f \end{aligned}$$

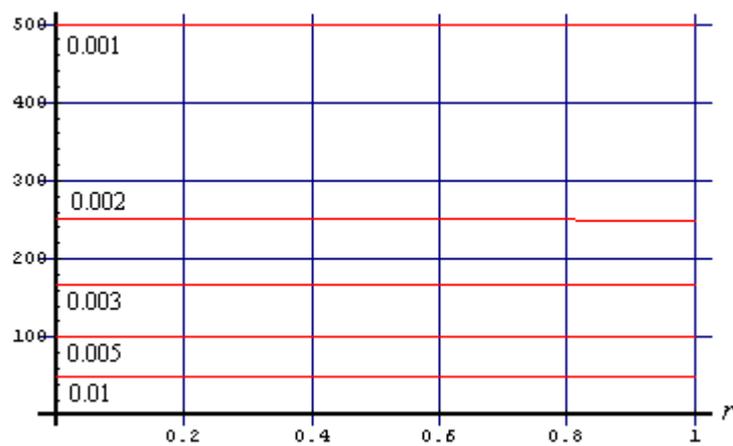
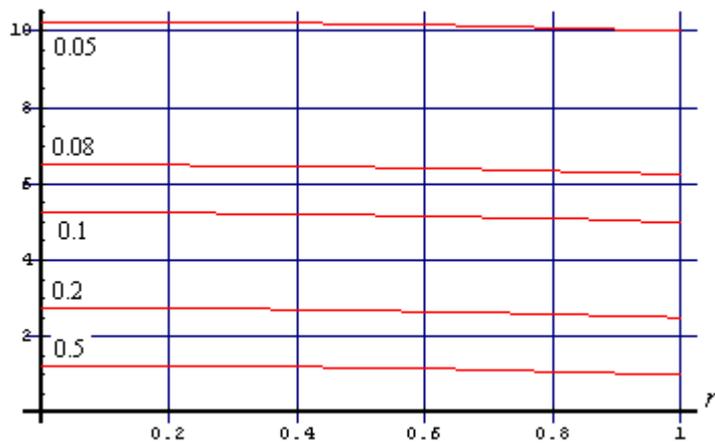
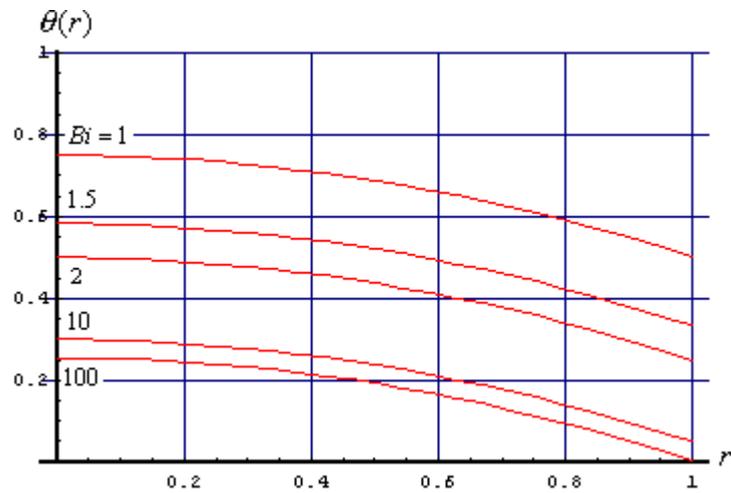
Per $\alpha \rightarrow 0$, ovvero $Bi \rightarrow 0$, invece, le distribuzioni di temperatura tendono, in ogni punto del conduttore a valori infiniti:

$$\lim_{Bi \rightarrow 0} \theta(r) = \lim_{Bi \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left(\frac{Bi+2}{Bi} - r^2 \right) = \infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} T(r) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\left(1 - \frac{R^2}{R_e^2} \right) \cdot \frac{\dot{u}_{gen} R_e^2}{4k} + \frac{\dot{u}_{gen} R_e}{2\alpha} + T_f \right] = \infty$$

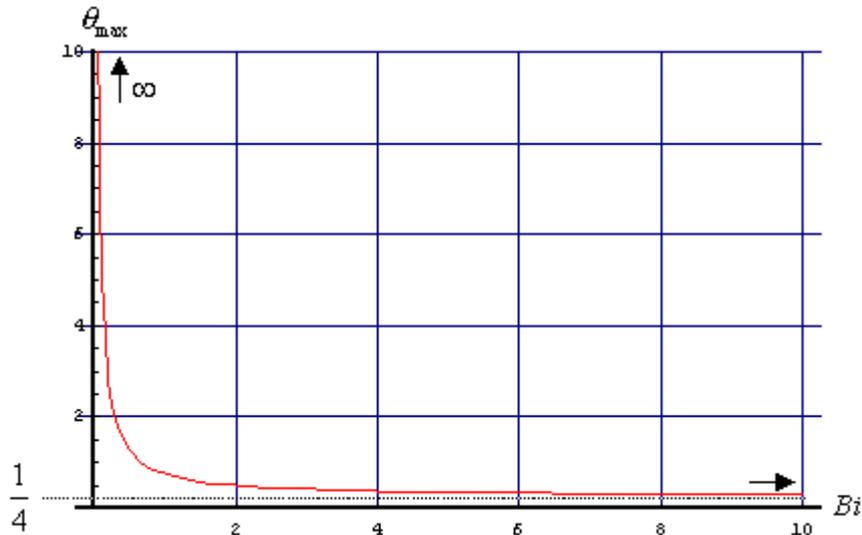
Le due tendenze commentate sopra si possono ritrovare per via grafica riportando, ad esempio, la temperatura adimensionale parametrizzata per vari valori del numero di Biot, come risulta dai grafici che seguono.

Dai grafici si può vedere come la curva della temperatura si alzi man mano che diminuisce il numero di Biot e come tale fenomeno si vada evidenziando per i valori più piccoli del Bi stesso.



Soffermandoci sulla temperatura adimensionale massima, $\theta(r=0)$, possiamo mettere meglio in evidenza le caratteristiche viste in precedenza, riportando il suo andamento in funzione del numero di Biot:

$$\theta_{\max} = \theta(r=0, Bi) = \frac{Bi + 2}{4Bi}$$



Si vede come $Bi \rightarrow \infty \Rightarrow \theta_{\max} \rightarrow 1/4$, lo stesso valore trovato nel caso di condizioni al contorno di I e II tipo, mentre $Bi \rightarrow 0 \Rightarrow \theta_{\max} \rightarrow \infty$.

Dai grafici della temperatura $\theta(r)$ per vari valori del Bi si può anche vedere come al diminuire del numero di Biot la temperatura tende a divenire indipendente dalla coordinata spaziale, cioè tende a divenire uniforme lungo il raggio del conduttore, perdendo il suo andamento parabolico. Quest'ultima proprietà del numero di Biot si può trovare anche sul piano analitico, a partire dalla condizione al contorno di III tipo:

$$-\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} = Bi \cdot \theta(r=1)$$

dalla quale si vede subito che minore è il Bi , minore è il gradiente di temperatura sulla superficie a contatto col fluido.

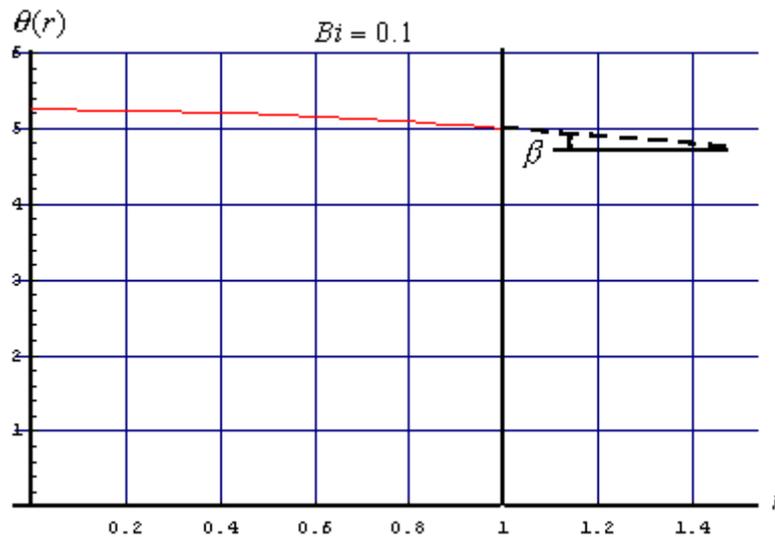
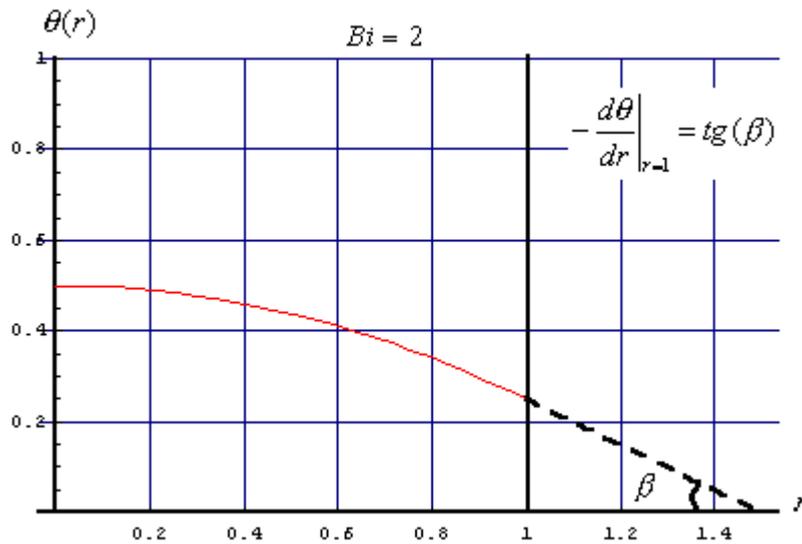
Per $Bi \ll 1$, la condizione si riduce a:

$$-\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} \approx 0$$

L'interpretazione giusta di quest'ultima condizione è quella di dire che, poiché il gradiente di temperatura sulla superficie è molto piccolo e poiché sulla superficie a contatto col fluido il gradiente è maggiore che in qualsiasi altro punto del corpo, la temperatura deve essere praticamente uniforme all'interno del corpo stesso:

$$Bi \ll 1 \Rightarrow \theta(x) = \cos t$$

I seguenti grafici chiariscono meglio il significato fisico del numero di Biot, si è messo in evidenza, infatti, come all'aumentare del Bi la temperatura all'interno del corpo tenda a divenire uniforme.



Concludendo possiamo affermare che al diminuire del numero di Biot la temperatura tende ad aumentare, tendendo a valori infiniti, e contemporaneamente a divenire uniforme all'interno del conduttore.

4. CONDUTTORE CON GENERAZIONE INTERNA NON COSTANTE

Consideriamo il caso più realistico nel quale la resistività elettrica del conduttore, e quindi la generazione interna di energia, non sia più costante ma risulti essere funzione della temperatura T :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{dT}{dR} \right] + \frac{\dot{u}_{gen}(T)}{k} = 0$$

$$\dot{u}_{gen}(T) = \rho_0 J^2 + \beta J^2 (T - T_0)$$

Combinando le due equazioni si ha:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{dT}{dR} \right] + \frac{\rho_0 J^2}{k} + \frac{\beta J^2}{k} (T - T_0) = 0$$

Introducendo le grandezze adimensionali:

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T_{rif}} \qquad r = \frac{R}{R_e}$$

si può ricavare l'equazione adimensionale della conduzione con generazione interna dipendente dalla temperatura:

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + m^2 \theta + 1 = 0}$$

Avendo assunto $\Delta T_{rif} = \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k}$ e avendo definito, per comodità, $m^2 = \frac{\beta J^2 R_e^2}{k}$.

Anche in questo caso possiamo ricercare un significato fisico per il ΔT_{rif} , scaturito da motivi di sola pulizia formale. Possiamo innanzitutto notare che il prodotto $\rho_0 J^2$ non è altro che la generazione di energia interna al conduttore alla temperatura T_0 , quindi definendo:

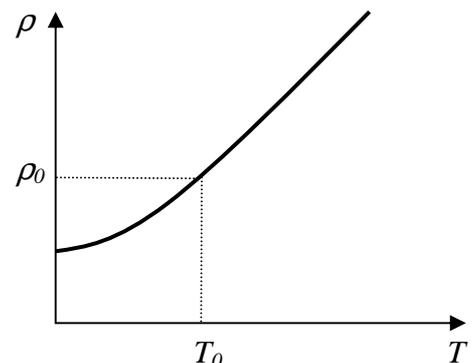
$$\dot{u}_0 = \rho_0 J^2$$

si può scrivere:

$$\Delta T_{rif} = \frac{R_e^2 \dot{u}_0}{k}$$

A questo punto, sulla base di quanto trovato nel caso con generazione interna costante, possiamo affermare che il salto di temperatura preso a riferimento è pari a quattro volte il salto massimo di temperatura che si avrebbe nel conduttore se la generazione, o in modo equivalente la resistività, fosse costante e pari a quella che si ha alla temperatura T_0 :

$$\Delta T_{rif} = 4 \Delta T_{\max} \Big|_{\rho=\rho_0}$$



5. SOLUZIONI APPROSSIMATE: METODO INTEGRALE

Condizioni al contorno di I e II tipo

Assumendo $T_0=T_e$, le equazioni adimensionali che descrivono il problema sono:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + m^2 \theta + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\theta(r=1) = 0$$

Sulla base di quanto trovato nel caso di generazione costante, ipotizziamo un andamento parabolico della temperatura, assumendo una soluzione approssimata del tipo:

$$\theta^*(r) = a + br + cr^2$$

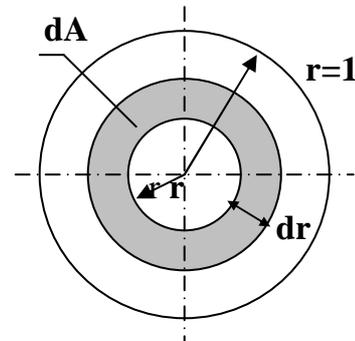
Dalla condizione al contorno di I tipo si ricava: $a + br + cr^2|_{r=1} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

Dalla condizione al contorno di II tipo si ricava: $b + 2cr|_{r=0} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -c$

Quindi :

$$\theta^*(r) = c(1 - r^2)$$

L'equazione integrale si ottiene imponendo che la soluzione approssimata soddisfi non l'equazione differenziale di partenza, e quindi il bilancio sul volume elementare, ma solo il suo integrale lungo una data direzione. Nel nostro caso unidimensionale non facciamo altro che integrare l'equazione differenziale sull'intero dominio di controllo, dato dalla superficie trasversale del cilindro:



$$\int_A \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) + m^2 \theta^* + 1 \right) dA = 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) + m^2 \theta^* + 1 \right) 2\pi r dr = \int_0^1 \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) + r m^2 \theta^* + r \right) dr = 0$$

$$\frac{d\theta^*}{dr} = -2cr \Rightarrow r \frac{d\theta^*}{dr} = -2cr^2 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) = -4cr$$

$$\int_0^1 \left(-4cr + m^2 c (r - r^3) + r \right) dr = \left[-2cr^2 + m^2 c \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 0$$

$$-2c + m^2 c \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{8 - m^2}$$

In definitiva:

$$\theta^*(r) = \frac{2}{8-m^2}(1-r^2)$$

$$T^*(R) = \frac{2\Delta T_{rif}}{8-m^2} \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) + T_e = \frac{2 \frac{\rho_0 J^2 R_e^2}{k}}{8-m^2} \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) + T_e$$

Le temperature minima e massima, approssimate, che si realizzano nel conduttore sono:

$$\begin{aligned} \theta_{\min}^* &= \theta^*(r=1) = 0 & T_{\min}^* &= T(R=R_e) = T_e \\ \theta_{\max}^* &= \theta^*(r=0) = \frac{2}{8-m^2} & T_{\max}^* &= T(R=0) = \frac{2 \frac{\rho_0 J^2 R_e^2}{k}}{8-m^2} + T_e \end{aligned}$$

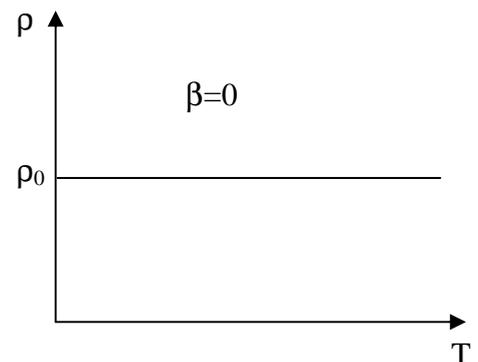
Dalle espressioni delle temperature possiamo dedurre, ricordando i risultati ottenuti con generazione costante, che per $m^2 \rightarrow 0$ senza che anche $\Delta T_{rif} \rightarrow 0$, le distribuzioni approssimate tendono a quelle esatte nel caso di generazione interna costante e pari a quella di riferimento, ossia quella che si ha con $\rho = \rho_0 = cost$:

$$\begin{aligned} \lim_{m^2 \rightarrow 0} \theta^*(r) &= \lim_{m^2 \rightarrow 0} \frac{2}{8-m^2}(1-r^2) \stackrel{H}{=} \frac{1}{4}(1-r^2) \\ \lim_{m^2 \rightarrow 0} T^*(R) &= \lim_{m^2 \rightarrow 0} \frac{2\Delta T_{rif}}{8-m^2} \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) + T_e = \\ &= \frac{\Delta T_{rif}}{4} \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) + T_e = T_e + \frac{\rho_0 J^2 R_e^2}{4k} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{R_e^2}\right) \end{aligned}$$

Poiché $\Delta T_{rif} = \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k}$ e $m^2 = \frac{\beta J^2 R_e^2}{k}$, m^2 può tendere a zero senza che lo faccia anche ΔT_{rif} solo se tende a zero β . In effetti per $\beta=0$ la curva $\rho-T$ è una retta parallela all'asse delle temperature quindi la resistività è indipendente dalla temperatura stessa. D'altra parte per $\beta=0$ l'equazione differenziale si riduce a quella con generazione costante:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{dT}{dR} \right] + \frac{\dot{u}_{gen}(\cancel{X})}{k} = 0$$

$$\dot{u}_{gen}(\cancel{X}) = \rho_0 J^2$$

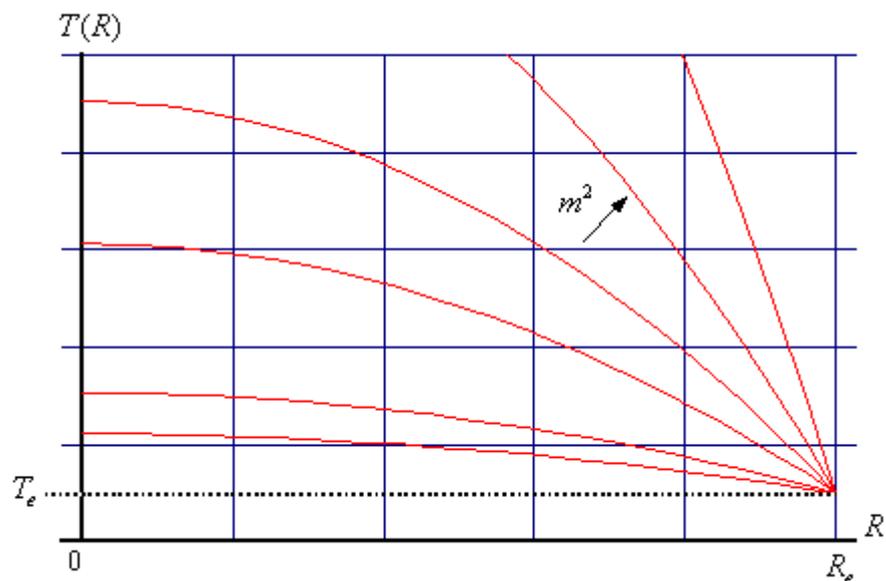
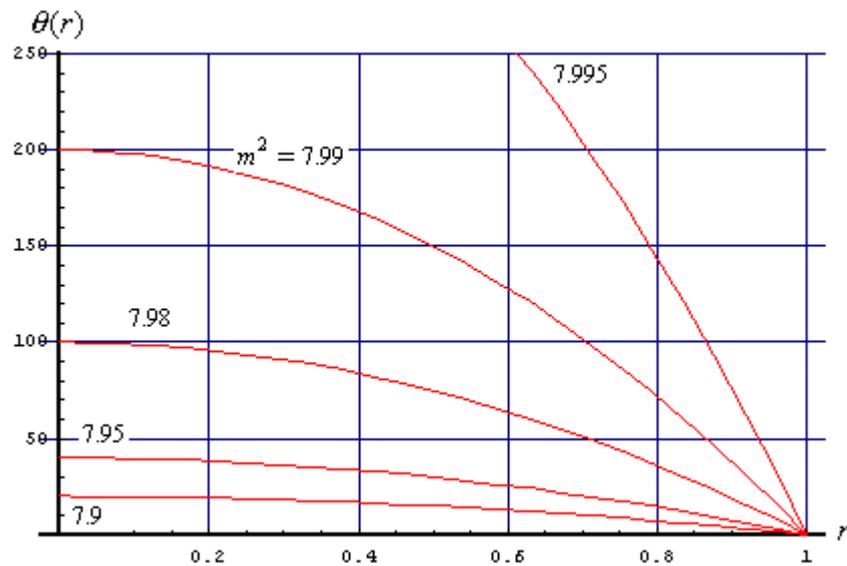


Per $m^2 \rightarrow 8$, invece, le distribuzioni di temperature, in ogni punto del conduttore, tendono a valori infiniti:

$$\lim_{m^2 \rightarrow 8} \theta^*(r) = \lim_{m^2 \rightarrow 8} \frac{2}{8 - m^2} (1 - r^2) = \infty$$

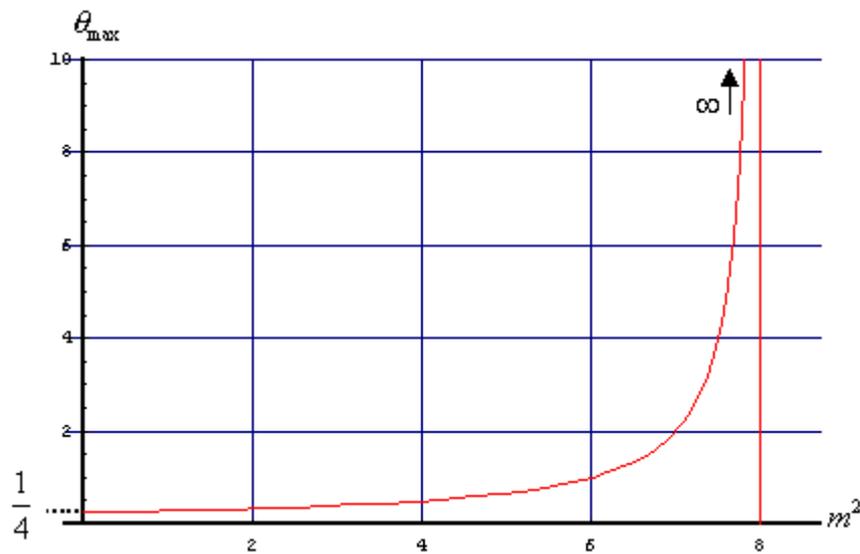
$$\lim_{m^2 \rightarrow 8} T^*(R) = \lim_{m^2 \rightarrow 8} \frac{2\Delta T_{rif}}{8 - m^2} \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) + T_e = \infty$$

Tale andamento è ben visibile dai grafici che seguono, nei quali sono riportate le temperature per valori del parametro m^2 sempre più prossimi ad 8:



Soffermandoci sulla temperatura massima adimensionale, possiamo riportare il suo andamento in funzione del parametro m^2 e notare subito le caratteristiche appena descritte:

$$\theta_{\max}^* = \theta^*(r=0) = \frac{2}{8-m^2}$$



Si può vedere che:

- per $m^2=0$ $\theta_{\max} = 1/4$, lo stesso valore trovato nel caso di generazione interna costante;
- per $m^2 \rightarrow 8$ $\theta_{\max} \rightarrow \infty$;

Condizione di stabilità

Come abbiamo già osservato, dalla soluzione approssimata con condizioni al contorno di I e II tipo si è ottenuto che

$$m^2 \rightarrow 8 \Rightarrow T_{max}^* \rightarrow \infty$$

Per $m^2 \rightarrow 8$, si verifica cioè un fenomeno di *instabilità termica* che porta al danneggiamento del conduttore stesso. Possiamo ricercare una condizione da rispettare in fase di progetto o di impiego del conduttore, per evitare l'insorgere dell'instabilità termica, esplicitando il parametro m^2 :

$$m^2 = \frac{\beta J^2 R_0^2}{k} = \frac{\beta J^2}{k} \frac{1}{\pi} R_0^2 \pi = \frac{\beta}{k\pi} J^2 A = \frac{\beta I^2}{k\pi}$$
$$m^2 < 8 \Rightarrow \frac{\beta I^2}{k\pi} < 8$$

In conclusione la condizione da rispettare per evitare l'instabilità termica è:

$$I < \sqrt{8 \frac{\pi k}{\beta}}$$

Dove I è l'intensità di corrente attraversata dal conduttore.

Condizioni al contorno di II e III tipo

Assumendo ancora $T_0=T_e$, le equazioni adimensionali che descrivono il problema sono:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + m^2 \theta + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} = -Bi \theta(r=1)$$

Sulla base di quanto trovato nel caso di generazione costante, ipotizziamo un andamento parabolico della temperatura, assumendo una soluzione approssimata del tipo:

$$\theta^*(r) = a + br + cr^2$$

Dalla condizione al contorno di II tipo si ricava: $b + 2cr|_{r=0} = 0 \Rightarrow b = 0$

Dalla condizione al contorno di III tipo si ricava: $2cr|_{r=1} = -Bi(a+c) \Rightarrow a = -\frac{2+Bi}{Bi}c$

Quindi:

$$\theta^*(r) = \left(r^2 - \frac{2+Bi}{Bi} \right) c$$

Equazione integrale:

$$\int_A \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) + m^2 \theta^* + 1 \right) dA = \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) + m^2 \theta^* + 1 \right) 2\pi r dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) + rm^2 \theta^* + r \right) dr = 0$$

$$\frac{d\theta^*}{dr} = 2cr \Rightarrow r \frac{d\theta^*}{dr} = 2cr^2 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta^*}{dr} \right) = 4cr$$

$$\int_0^1 \left(4cr + m^2 cr^3 - m^2 c \frac{2+Bi}{Bi} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \right) dr = \left[2cr^2 + m^2 c \frac{r^4}{4} - m^2 c \frac{2+Bi}{Bi} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 = 0$$

$$2c + \frac{m^2 c}{4} - \frac{m^2 c}{2} \cdot \frac{2+Bi}{Bi} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow c = \frac{2Bi}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi}$$

In definitiva:

$$\theta^*(r) = \left(r^2 - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \cdot \frac{2Bi}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi}$$

$$T^*(R) = T_f + \left(\frac{R^2}{R_e^2} - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \frac{2Bi \Delta T_{rif}}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi} =$$

$$= T_f + \left(\frac{R^2}{R_e^2} - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \frac{2Bi \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k}}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi}$$

Le temperature minima e massima, approssimate, che si realizzano nel conduttore sono:

$$\theta_{\min}^* = \theta^*(r=1) = \frac{4}{8Bi - m^2 Bi - 4m^2} \qquad T_{\min}^* = T^*(R=R_e) = T_f + \frac{4\Delta T_{rif}}{8Bi - 4m^2 - m^2 Bi}$$

$$\theta_{\max}^* = \theta^*(r=0) = \frac{2(Bi+2)}{8Bi - m^2 Bi - 4m^2} \qquad T_{\max}^* = T^*(R=0) = T_f + \frac{2\Delta T_{rif}(2+Bi)}{8Bi - 4m^2 - m^2 Bi}$$

Anche per le soluzioni approssimate si può osservare che per $Bi \rightarrow \infty$, le distribuzioni di temperatura tendono a quelle trovate nel caso con condizione al contorno di I tipo in luogo di quella di III tipo:

$$\lim_{Bi \rightarrow \infty} \theta^*(r) = \lim_{Bi \rightarrow \infty} \left(r^2 - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \cdot \frac{2Bi}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi} =$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{Bi \rightarrow \infty} (r^2 - 1) \cdot \frac{2}{m^2 - 8} = \frac{2}{8 - m^2} (1 - r^2)$$

$$\lim_{Bi \rightarrow \infty} T^*(R) = \lim_{Bi \rightarrow \infty} T_f + \left(\frac{R^2}{R_e^2} - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \frac{2Bi \Delta T_{rif}}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi} =$$

$$\stackrel{H}{=} \left(\frac{R^2}{R_e^2} - 1 \right) \frac{2\Delta T_{rif}}{m^2 - 8} + T_f$$

E'interessante osservare, invece, che, contrariamente a quanto avviene nel caso di generazione costante, quando il numero di Biot tende a zero, la temperatura, in ogni punto, non tende a valori infiniti, ma assume un valore finito:

$$\lim_{Bi \rightarrow 0^+} \theta^*(r) = \lim_{Bi \rightarrow 0^+} \left(r^2 - \frac{2 + Bi}{Bi} \right) \cdot \frac{2Bi}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi} = \frac{1}{m^2}$$

$$\lim_{Bi \rightarrow 0^+} T^*(R) = \lim_{Bi \rightarrow 0^+} T_f + \left(\frac{R^2}{R_e^2} - \frac{2 + Bi}{Bi} \right) \frac{2Bi \Delta T_{rif}}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi} = T_f + \frac{\Delta T_{rif}}{m^2}$$

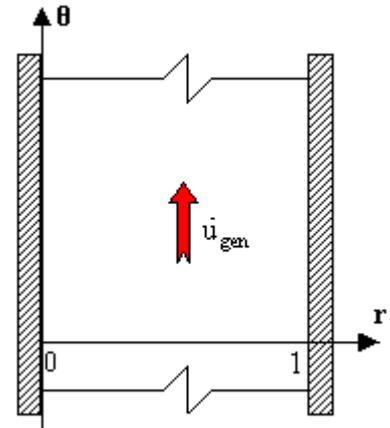
La temperatura quindi diviene uniforme ma non tende all'infinito. Comunque il parametro m ha valori molto bassi, come vedremo più avanti, perciò per $Bi \rightarrow 0$ si raggiungono anche in questo caso temperature molto elevate; d'altra parte per $\beta=0$, cioè resistività costante, $m=0$ e si recupera il valore infinito del caso con generazione costante.

Per $Bi=0$ la condizione di III tipo

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} = -Bi \cdot \theta(r=1)$$

si riduce ad una condizione di II tipo:

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} = 0$$



che fisicamente indica l'adiabaticità della superficie esterna del conduttore che risulta quindi termicamente isolato.

Ancora dalle espressioni delle temperature possiamo dedurre, ricordando i risultati ottenuti con generazione costante, che per $m^2 \rightarrow 0$, senza che anche $\Delta T_{rif} \rightarrow 0$, le distribuzioni approssimate tendono a quelle esatte nel caso di generazione interna costante e pari a quella di riferimento $\dot{u}_0 = \rho_0 J^2$, ossia quella che si ha con $\rho = \rho_0 = cost$, quindi si possono ripetere le considerazioni già fatte nel caso precedente.

$$\lim_{m^2 \rightarrow 0} \theta^*(r) = \frac{1}{4}(1 - r^2) + \frac{1}{2Bi}$$

$$\lim_{m^2 \rightarrow 0} T^*(R) = \left(1 - \frac{R^2}{R_e^2} \right) \cdot \frac{\Delta T_{rif}}{4} + \frac{\Delta T_{rif}}{2Bi} + T_f$$

Modificando l'espressione della temperatura si riesce ad individuare immediatamente una importante caratteristica già incontrata in precedenza, infatti ponendo le espressioni nella forma:

$$\begin{aligned}\theta^*(r) &= \left(r^2 - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \cdot \frac{2Bi}{4m^2 + m^2Bi - 8Bi} = \\ &= \left(r^2 - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \cdot \frac{\frac{2Bi}{Bi+4}}{m^2 - \frac{8Bi}{Bi+4}}\end{aligned}$$

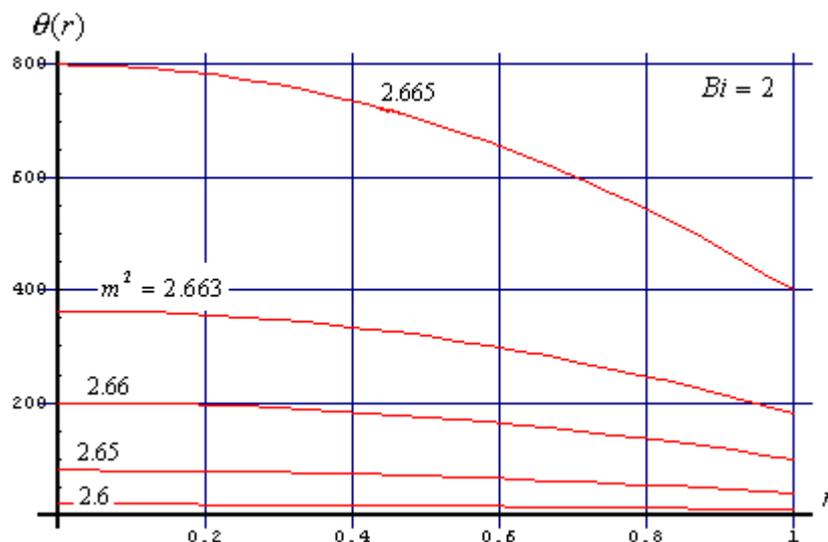
$$\begin{aligned}T^*(R) &= T_f + \left(\frac{R^2}{R_e^2} - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \frac{2Bi \Delta T_{rif}}{4m^2 + m^2Bi - 8Bi} = \\ &= T_f + \left(\frac{R^2}{R_e^2} - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \frac{2\Delta T_{rif} \frac{Bi}{4+Bi}}{m^2 - \frac{8Bi}{Bi+4}}\end{aligned}$$

si vede facilmente che per $m^2 \rightarrow \frac{8Bi}{4+Bi}$ le temperature tendono in ogni punto del conduttore a valori infiniti:

$$\lim_{m^2 \rightarrow \frac{8Bi}{Bi+4}} \theta^*(r) = \infty$$

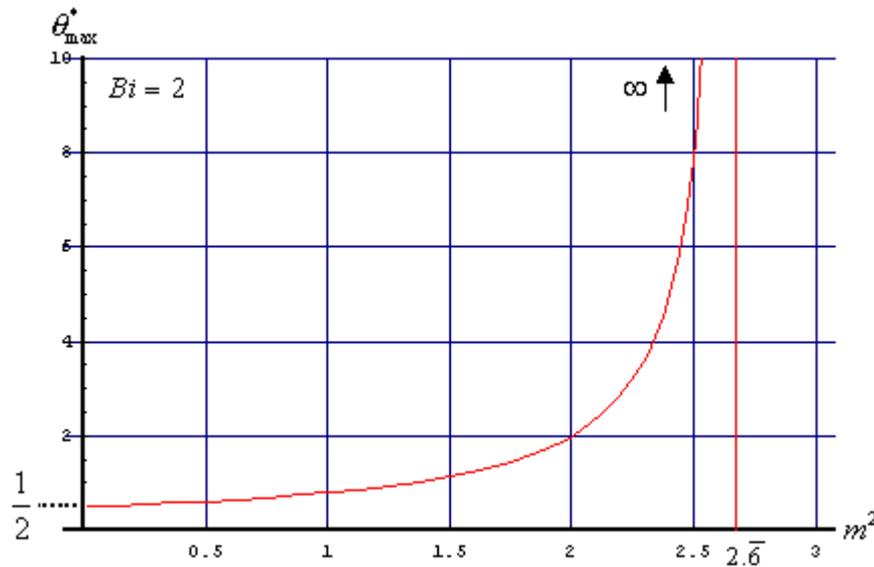
$$\lim_{m^2 \rightarrow \frac{8Bi}{Bi+4}} T^*(R) = \infty$$

Come esempio si riportano le curve adimensionali per $Bi=2$ parametrizzate per valori di m^2 prossimi al valore limite $\frac{8Bi}{4+Bi} = 2.\bar{6}$:



Soffermandoci sulla temperatura massima adimensionale, possiamo riportare il suo andamento in funzione del parametro m^2 , ancora per $Bi=2$, e notare subito le caratteristiche appena descritte :

$$\theta_{\max}^* = \frac{2(Bi+2)}{8Bi - m^2 Bi - 4m^2} = \frac{8}{16 - 6m^2}$$

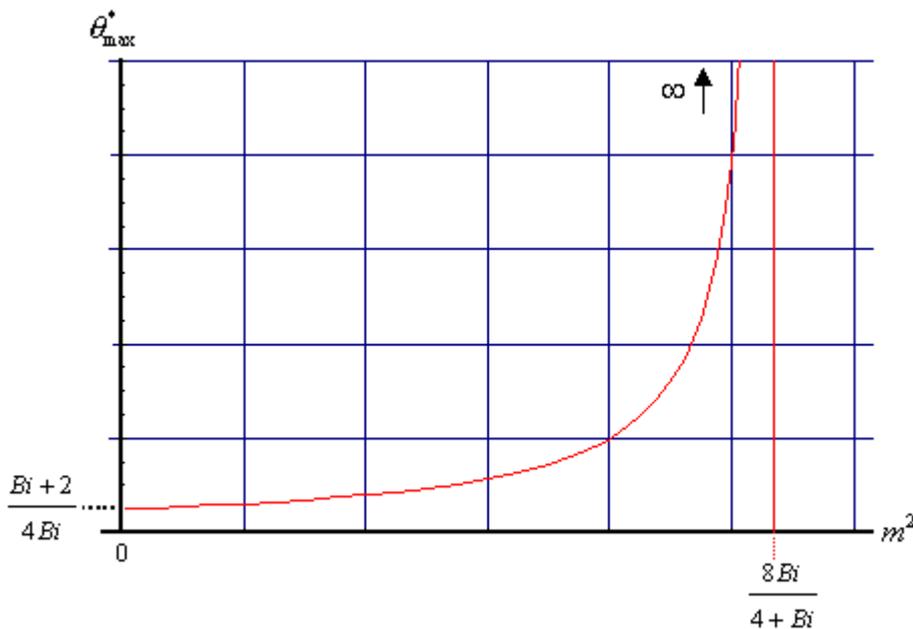


- per $m^2 \rightarrow 0$ $\theta_{\max}^* \rightarrow 1/2$, lo stesso valore che si trova nel caso di generazione costante sempre con $Bi=2$:

$$\theta_{\max} \Big|_{\rho=const} = \frac{Bi+2}{4Bi} = \frac{2+2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

- per $m^2 \rightarrow 2.\bar{6}$ $\theta_{\max}^* \rightarrow \infty$.

Le proprietà della temperatura massima si possono quindi sintetizzare nella seguente figura:



Condizione di stabilità

Come abbiamo già osservato, dalla soluzione approssimata con condizioni al contorno di II e III tipo si è ottenuto che:

$$m^2 \rightarrow \frac{8Bi}{4+Bi} \Rightarrow T_{max}^* \rightarrow \infty$$

Si verifica, quindi, un fenomeno di instabilità termica che porta al danneggiamento del conduttore stesso. Possiamo ricercare una condizione da rispettare in fase di progetto o di impiego del conduttore, per evitare l'insorgere dell'instabilità termica, esplicitando il parametro m^2 :

$$m^2 = \frac{\beta J^2 R_0^2}{k} = \frac{\beta J^2}{k} \frac{1}{\pi} R_0^2 \pi = \frac{\beta}{k\pi} J^2 A = \frac{\beta I^2}{k\pi}$$

$$m^2 < \frac{8Bi}{4+Bi} \Rightarrow \frac{\beta I^2}{\pi k} < \frac{8Bi}{4+Bi}$$

In conclusione la condizione da rispettare per evitare l'instabilità termica è:

$$I < \sqrt{8 \frac{\pi k}{\beta} \frac{Bi}{4+Bi}}$$

La proprietà in precedenza ritrovata per il campo di temperatura si conserva sul criterio di stabilità, si ha cioè che per $Bi \rightarrow \infty$, il criterio di stabilità tende a quello ricavato nel caso con condizione al contorno di I tipo:

$$\lim_{Bi \rightarrow \infty} \frac{8\pi k}{\beta} \frac{Bi}{4+Bi} = \frac{8\pi k}{\beta}$$

6. SOLUZIONI ESATTE :FUNZIONI DI BESSEL

Condizioni al contorno di I e II tipo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + m^2 \theta + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\theta(r=1) = 0$$

Ricerchiamo la soluzione esatta del problema come somma di una parte costante, θ_c , e di una parte funzione della coordinata r , $\theta_g(r)$, soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$\theta(r) = \theta_g(r) + \theta_c$$

Sostituendo nel problema si ha:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_g}{dr} \right) + m^2 \theta_g + m^2 \theta_c + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta_g}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\theta_g(r=1) + \theta_c = 0$$

Si possono così individuare due sottoproblemi:

$$\begin{array}{l}
 m^2 \theta_c + 1 = 0 \\
 \Rightarrow \theta_c = -\frac{1}{m^2}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_g}{dr} \right) + m^2 \theta_g = 0 \\
 \left. \frac{d\theta_g}{dr} \right|_{r=0} = 0 \\
 \theta_g(r=1) = -\theta_c
 \end{array}
 \right.$$

Nel definire i sottoproblemi si è avuta cura di far ricadere il termine noto dell'equazione differenziale di partenza in quello in cui il termine noto stesso risulta più facile da gestire; il primo sottoproblema, infatti, è di immediata soluzione ed allo stesso tempo il secondo è divenuto omogeneo nell'equazione differenziale, prestandosi così ad una risoluzione più agevole (la nuova equazione non è altro che l'omogenea associata a quella del problema completo).

La soluzione generale del secondo sottoproblema è del tipo:

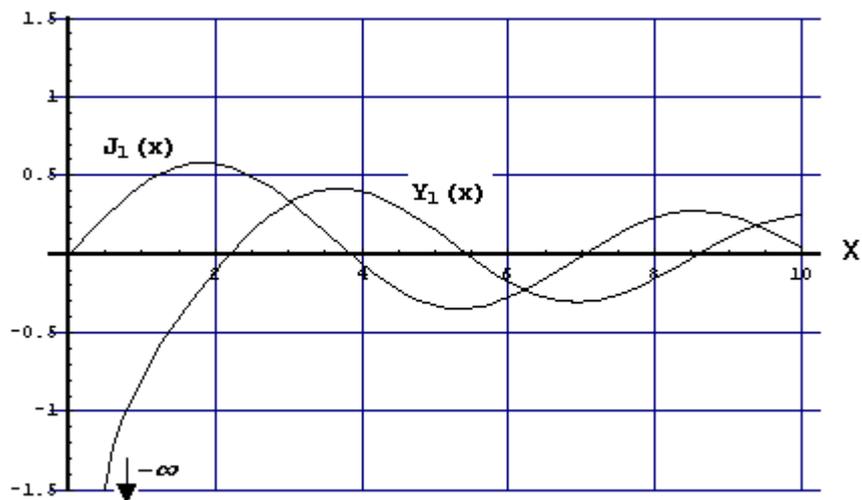
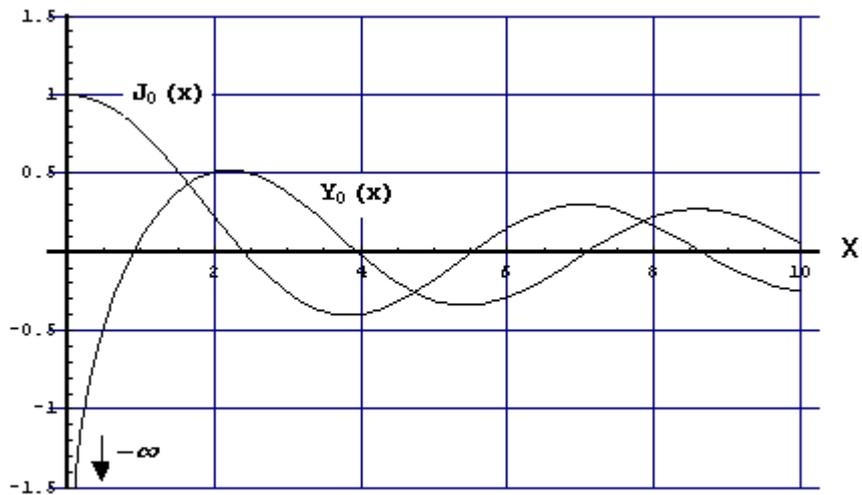
$$\theta_g(r) = A \cdot J_0(r \cdot m) + B \cdot Y_0(r \cdot m)$$

con $J_0(x)$ funzione di Bessel di prima specie di ordine zero e $Y_0(x)$ funzione di Bessel di seconda specie di ordine zero. Le funzioni di Bessel di ordine zero, sono legate alle proprie derivate dalle relazioni:

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

$$Y_0'(x) = -Y_1(x)$$

con $J_1(x)$ funzione di Bessel di prima specie di ordine uno e $Y_1(x)$ funzione di Bessel di seconda specie di ordine uno, e le loro caratteristiche principali si possono dedurre dai grafici che seguono.



Tenendo conto di quanto detto le condizioni al contorno si possono scrivere come:

$$\begin{aligned}
 -A \cdot m \cdot J_1(0) - B \cdot m \cdot Y_1(0) &= 0 \\
 A \cdot J_0(m) + B \cdot Y_0(m) &= \frac{1}{m^2}
 \end{aligned}$$

e da esse, rifacendosi all'andamento delle funzioni di Bessel e delle loro derivate, si ricava:

$$\begin{aligned}
 -A \cdot m \cdot 0 - B \cdot m \cdot \infty &= 0 \Rightarrow B = 0 \\
 A \cdot 1 + B \cdot 0 &= \frac{1}{m^2} \Rightarrow A = \frac{1}{m^2 \cdot J_0(m)}
 \end{aligned}$$

Quindi la soluzione del secondo sottoproblema è definita come:

$$\theta_s(r) = \frac{J_0(r \cdot m)}{m^2 \cdot J_0(m)}$$

In definitiva la soluzione completa adimensionale del problema, somma delle soluzioni del primo e del secondo sottoproblema, è:

$$\theta(r) = \frac{J_0(r \cdot m)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2}$$

e riscrivendola in termini delle variabili dimensionali:

$$T(R) = T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \left(\frac{J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Possiamo ricavare, quindi, le temperature minima e massima che si realizzano nel conduttore:

$$\theta_{\min} = \theta(r=1) = 0$$

$$T_{\min} = T(R = R_e) = T_e$$

$$\theta_{\max} = \theta(r=0) = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{J_0(m)} - 1 \right)$$

$$T_{\max} = T(R=0) = T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{J_0(m)} - 1 \right)$$

Come ormai ci si attende da quanto visto nelle soluzioni approssimate, per $m \rightarrow 0$ senza che tenda a zero anche il ΔT_{rif} , le espressioni delle distribuzioni tendono a quelle trovate nel caso di generazione interna costante:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} \theta(r) &= \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{J_0(rm)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) = \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{J_0(m) - J_0(m)}{m^2 J_0(m)} \right)^H = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{-rJ_1(rm) + J_1(m)}{2mJ_0(m) - m^2 J_1(m)} = \\ &= \lim_{m \rightarrow 0}^H \frac{-r \left[\frac{1}{2} (J_0(rm) - J_2(rm)) \right] + \frac{1}{2} (J_0(m) - J_2(m))}{2J_0(m) - 2mJ_1(m) - 2mJ_1(m) - m^2 \left[\frac{1}{2} (J_0(m) - J_2(m)) \right]} = \frac{-\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}(1-r^2) \end{aligned}$$

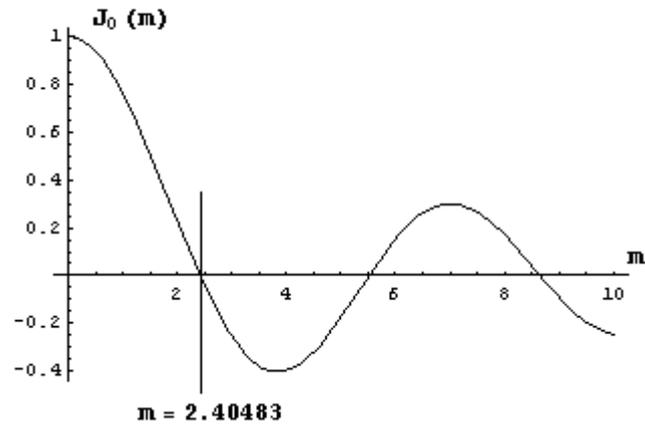
$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} T(R) &= \lim_{m \rightarrow 0} \left(T_e + \frac{R_e^2 \rho_o J^2}{k} \cdot \left(\frac{J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) \right) = \\ &= T_e + \frac{R_e^2 \rho_o J^2}{k} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{R_e^2} \right) \end{aligned}$$

Possiamo, infatti, notare come l'ultima espressione della temperatura dimensionale coincida con quella con generazione costante e pari a $\rho_o J^2$, cioè la generazione che si avrebbe se la resistività rimanesse costante al valore che assume alla temperatura T_0 presa a riferimento nell'approssimazione della curva resistività-temperatura con una retta. Si ricorda come tutto ciò era stato riprodotto fedelmente anche dalla soluzione approssimata. Quello che è più importante da considerare, comunque, è che dalle espressioni delle temperature si può vedere che per $J_0(m)=0$ la temperatura del conduttore tende, in ogni suo punto, a valori infiniti:

$$\lim_{J_0(m) \rightarrow 0} \theta(r) = \lim_{J_0(m) \rightarrow 0} \left(\frac{J_0(r \cdot m)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) = \infty$$

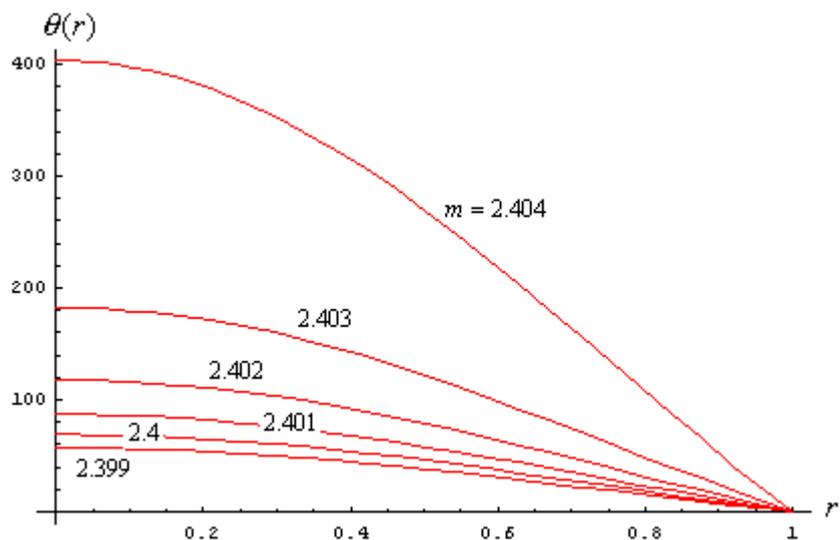
$$\lim_{J_0(m) \rightarrow 0} T(R) = \lim_{J_0(m) \rightarrow 0} \left(T_e + \frac{R_e^2 \rho_o J^2}{k} \cdot \left(\frac{J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) \right) = \infty$$

Stante l'andamento della funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero, che si riporta nella figura sottostante, le condizioni limite si possono riscrivere come:



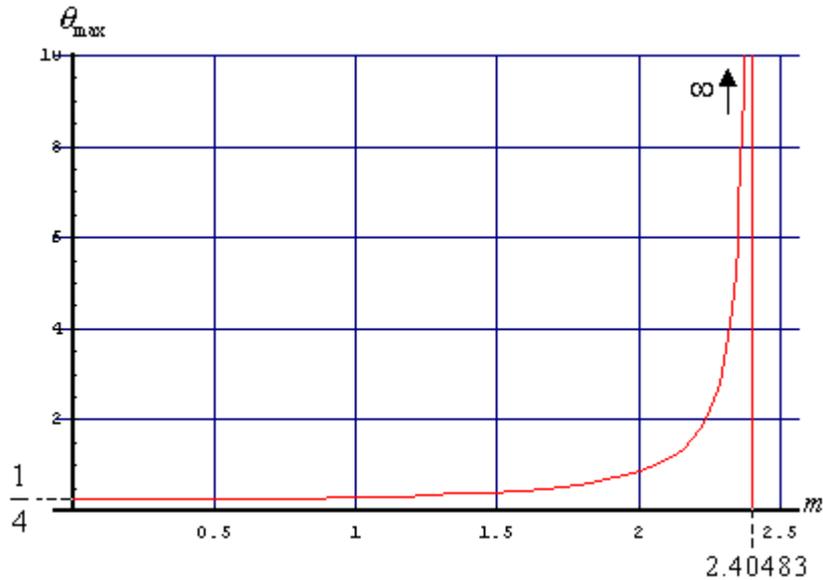
$$\lim_{m \rightarrow 2.4} \theta(r) = \lim_{J_0(m) \rightarrow 0} \left(\frac{J_0(r \cdot m)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) = \infty$$

$$\lim_{m \rightarrow 2.4} T(R) = \lim_{J_0(m) \rightarrow 0} \left(T_e + \frac{R_e^2 \rho_o J^2}{k} \cdot \left(\frac{J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) \right) = \infty$$



Soffermandoci sulla temperatura massima adimensionale si possono individuare graficamente le caratteristiche illustrate in precedenza con riferimento al parametro m :

$$\theta_{\max} = \theta(r=0) = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{J_0(m)} - 1 \right)$$



Si può vedere che:

- per $m \rightarrow 0$ $\theta_{\max} \rightarrow 1/4$, lo stesso valore trovato nel caso di generazione interna costante;
- per $m \rightarrow 2.4$ $\theta_{\max} \rightarrow \infty$;

Condizione di stabilità

Come abbiamo già osservato, dalla soluzione esatta con condizioni di I e II tipo si ottiene che:

$$J_0(m) \rightarrow 0 \Rightarrow T_{\max} \rightarrow \infty$$

$$m \rightarrow 2.4 \Rightarrow T_{\max} \rightarrow \infty$$

La condizione da rispettare per mantenersi in condizioni di stabilità termica è dunque :

$$m < 2.4$$

ovvero:

$$m^2 < 5.76$$

Esplicitando il parametro m^2 :

$$m^2 = \frac{\beta J^2 R_0^2}{k} = \frac{\beta J^2}{k} \frac{1}{\pi} R_0^2 \pi = \frac{\beta}{k\pi} J^2 A = \frac{\beta I^2}{k\pi}$$

$$m^2 = \frac{\beta I^2}{k\pi} \Rightarrow m = I \sqrt{\frac{\beta}{k\pi}}$$

In conclusione la condizione da rispettare per evitare l'instabilità termica è:

$$\boxed{I < 2.4 \sqrt{\frac{\pi k}{\beta}}}$$

Condizioni al contorno di II e III tipo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + m^2 \theta + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=1} = -Bi \cdot \theta(r=1)$$

In maniera analoga al caso precedente, ricerchiamo la soluzione esatta del problema come somma di una parte costante, θ_c , e di una parte funzione della coordinata r , $\theta_g(r)$, che, come è noto, non è altro che la soluzione generale del problema omogeneo associato:

$$\theta(r) = \theta_g(r) + \theta_c$$

Sostituendo nel problema si ha:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_g}{dr} \right) + m^2 \theta_g + m^2 \theta_c + 1 = 0$$

$$\left. \frac{d\theta_g}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{d\theta_g}{dr} \right|_{r=1} = -Bi \cdot \theta_g(r=1) - Bi \cdot \theta_c$$

Si possono così individuare due sottoproblemi, facendo in modo che il sottoproblema differenziale risulti omogeneo nell'equazione differenziale

:

$$m^2 \theta_c + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \theta_c = -\frac{1}{m^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_g}{dr} \right) + m^2 \theta_g = 0$$

$$\left. \frac{d\theta_g}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{d\theta_g}{dr} \right|_{r=1} = -Bi \cdot \theta_g(r=1) - Bi \cdot \theta_c$$

La soluzione del primo sottoproblema è immediata mentre la soluzione generale del secondo sottoproblema è fornita in termini di funzioni di Bessel di ordine zero ed uno:

$$\theta_g(r) = A \cdot J_0(r \cdot m) + B \cdot Y_0(r \cdot m)$$

Ricorrendo alle proprietà delle funzioni di Bessel illustrate in precedenza le condizioni al contorno si possono scrivere come:

$$\begin{aligned} -A \cdot m \cdot J_1(0) - B \cdot m \cdot Y_1(0) &= 0 \\ -A \cdot m \cdot J_1(m) &= -Bi \cdot (A \cdot J_0(m) + B \cdot Y_0(m)) - \frac{Bi}{m^2} \end{aligned}$$

Da tali condizioni e dall'andamento delle funzioni di Bessel e delle loro derivate si ricava:

$$\begin{aligned} A &= \frac{Bi}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m \cdot J_1(m))} \\ B &= 0 \end{aligned}$$

Quindi la soluzione del secondo sottoproblema è data da:

$$\theta_g(r) = \frac{Bi \cdot J_0(r \cdot m)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))}$$

In definitiva la soluzione completa adimensionale, somma di quelle del primo e del secondo sottoproblema, assume la seguente forma :

$$\theta(r) = \frac{Bi \cdot J_0(r \cdot m)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))} - \frac{1}{m^2}$$

Passando al dimensionale:

$$T(R) = T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \left(\frac{Bi \cdot J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Le temperature minima e massima che si realizzano nel conduttore sono:

$$T_{\min} = T(R = R_e) = T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \frac{J_1(m)}{m(Bi \cdot J_0(m) - m \cdot J_1(m))}$$

$$T_{\max} = T(R = 0) = T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \left(\frac{Bi}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m \cdot J_1(m))} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Come ci si attende, per $Bi \rightarrow \infty$ la distribuzione di temperatura tende a quella trovata nel caso di condizioni al contorno di I e II tipo:

$$\begin{aligned} \lim_{Bi \rightarrow \infty} \theta(r) &= \lim_{Bi \rightarrow \infty} \left(\frac{Bi \cdot J_0(r \cdot m)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))} - \frac{1}{m^2} \right)^H \\ &= \lim_{Bi \rightarrow \infty} \left(\frac{J_0(r \cdot m)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{J_0(r \cdot m)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{Bi \rightarrow \infty} T(R) &= \lim_{Bi \rightarrow \infty} \left(T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \left(\frac{Bi \cdot J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))} - \frac{1}{m^2} \right) \right) = \\ &= T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \left(\frac{J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

Per $Bi \rightarrow 0$ si ritrova un risultato che ci aveva già fornito la soluzione approssimata:

$$\lim_{Bi \rightarrow 0^+} \theta(r) = \lim_{Bi \rightarrow 0^+} \left(\frac{Bi \cdot J_0(r \cdot m)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))} - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{1}{m^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{Bi \rightarrow 0^+} T(R) &= \lim_{Bi \rightarrow 0^+} \left(T_e + \frac{R_e^2 \rho_0 J^2}{k} \cdot \left(\frac{Bi \cdot J_0\left(\frac{R}{R_e} \cdot m\right)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))} - \frac{1}{m^2} \right) \right) = \\ &= T_e + \frac{\Delta T_{rif}}{m^2} \end{aligned}$$

Si può quindi affermare che mentre nel caso di generazione costante, quando il numero di Biot tende a zero, la temperatura, in ogni punto del conduttore, tende a valori infiniti, ciò non avviene nel caso di generazione interna non costante. Si ricorda, comunque, che il parametro m nei conduttori elettrici assume valori molto minori dell'unità, come si può capire dall'esempio numerico che conclude il nostro lavoro, quindi anche nel caso di generazione non costante si raggiungono, per $Bi \rightarrow 0$, temperature non sopportabili dal materiale.

Possiamo ancora vedere che per $m \rightarrow 0$ la distribuzione di temperatura tende a quella trovata nel caso di generazione costante:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} \theta(r) &= \lim_{m \rightarrow 0} \left(\frac{Bi \cdot J_0(r \cdot m)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - mJ_1(m))} - \frac{1}{m^2} \right) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{Bi (J_0(r \cdot m) - J_0(m)) + mJ_1(m)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - mJ_1(m))} = \\ &= \lim_{m \rightarrow 0}^H \left(\frac{Bi (-rJ_1(rm) + J_1(m)) + J_1(m) + \frac{m}{2} (J_0(m) - J_2(m))}{2m (BiJ_0(m) - mJ_1(m)) + m^2 \left[-(1+Bi)J_1(m) - \frac{m}{2} (J_0(m) - J_2(m)) \right]} \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow 0}^H \left(\frac{\left(1 + \frac{Bi}{2} - Bi \frac{r^2}{2} \right) [J_0(rm) - J_2(rm)] + \frac{m}{2} [J_3(m) - \frac{3}{2} J_1(m)]}{2 [BiJ_0(m) - mJ_1(m)] - 4m \left[(1+Bi)J_1(m) + \frac{m}{2} [J_0(m) - J_2(m)] \right] + \right. \\ &\quad \left. - m^2 \left[\left(1 + \frac{Bi}{2} \right) [J_0(m) - J_2(m)] - \frac{m}{4} [3J_1(m) - J_3(m)] \right]} \right) = \\ &= \frac{1 + \frac{Bi}{2} - \frac{r^2 Bi}{2}}{2Bi} = \frac{1}{4} (1 - r^2) + \frac{1}{2Bi} \end{aligned}$$

Avendo tenuto conto che :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1(m)}{dm} &= \frac{1}{2} (J_0(m) - J_2(m)) \\ \frac{dJ_2(m)}{dm} &= \frac{1}{2} (J_1(m) - J_3(m)) \end{aligned}$$

e che:

$$J_0(0)=1 \text{ e } J_1(0)=J_2(0)=J_3(0)=0.$$

La stessa dimostrazione si può condurre per la temperatura dimensionale portando agli stessi risultati e alle stesse considerazioni che già la soluzione approssimata ci aveva permesso di svolgere in merito alla "generazione interna di riferimento".

Condizione di stabilità

Per la soluzione esatta a con condizioni di II e III tipo, dall'espressione della temperatura massima si vede che:

$$(Bi \cdot J_0(m) - m \cdot J_1(m)) \rightarrow 0 \Rightarrow T_{\max} \rightarrow \infty$$

Per ricavare la condizione di stabilità bisogna quindi ricercare il primo punto di nullo, m_0 , della funzione:

$$f(m, Bi) = Bi \cdot J_0(m) - m \cdot J_1(m)$$

Ritroviamo che la condizione di stabilità dipende dal numero di Biot, così come avveniva nella soluzione approssimata. In questo caso però non si può ricavare un'espressione esplicita del parametro m in funzione del Bi , ma occorre risolvere (per via numerica), caso per caso, l'equazione $BiJ_0(m) - mJ_1(m) = 0$.

Una volta trovata, per un assegnato valore del Bi , la prima radice m_0 la condizione di stabilità si può ancora ricavare esplicitando il parametro m^2 e si ha:

$$I < m_0 \sqrt{\frac{\pi k}{\beta}}$$

In particolare notiamo che per $Bi \rightarrow \infty$ il criterio coincide con quello trovato con condizioni al contorno di I e II tipo; la condizione di stabilità si può, infatti, porre anche nella forma :

$$J_0(m) = \frac{m \cdot J_1(m)}{Bi}$$

dalla quale si vede subito che per $Bi \rightarrow \infty$, diviene:

$$J_0(m) = 0 \Rightarrow m = 2.4048$$

che coincide proprio con quella trovata nel caso con condizioni di I e II tipo.

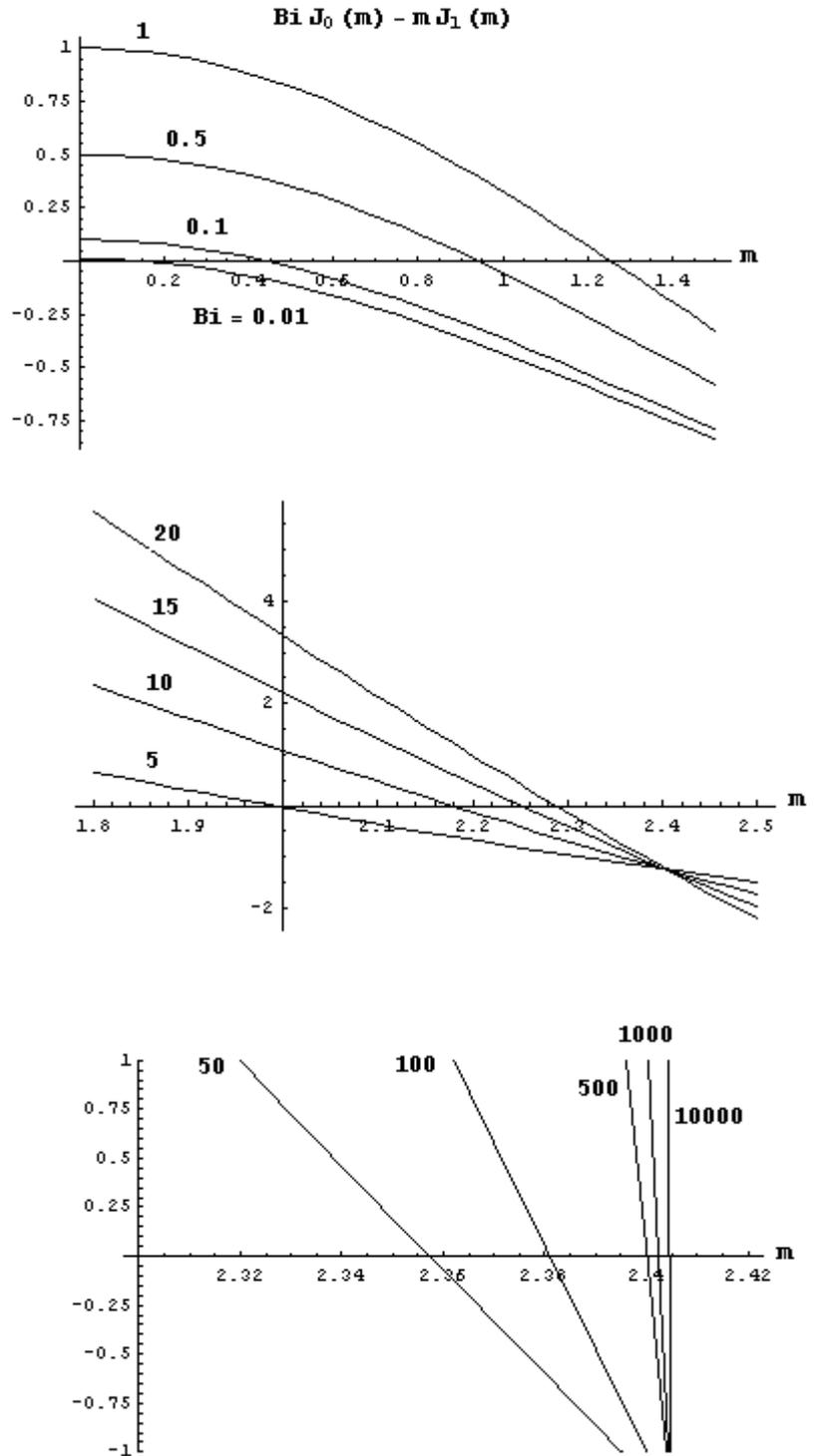
Di seguito sono riportati alcuni valori di m_0 per altrettanti valori del numero di Biot, con i relativi grafici della funzione $f(m, Bi)$. Tali valori sono stati ricavati tramite la funzione FindRoot, disponibile nella libreria del programma di calcolo Mathematica4®, che consente di ricercare per via numerica gli zeri di una funzione all'interno di un determinato intervallo o a partire da un determinato valore della variabile indipendente.

Anche da questi valori si può notare che per $Bi \rightarrow \infty$ la radice m_0 tende al valore 2.4048, mentre per $Bi \rightarrow 0$, la radice m_0 tende a zero, d'altra parte in precedenza abbiamo visto che per Bi che tende a zero si ha:

$$\theta(r) \rightarrow \frac{1}{m^2}$$

da cui $m_0 = 0$.

Bi	m_0
0	0
0.01	0.1412
0.05	0.3143
0.1	0.4417
0.2	0.6170
0.3	0.7465
0.4	0.8516
0.5	0.9408
0.6	1.0184
0.7	1.0873
0.8	1.1490
0.9	1.2049
1	1.2558
1.3	1.3854
1.5	1.4570
2	1.5995
3	1.7887
5	1.9898
10	2.1795
15	2.2509
20	2.2881
25	2.3108
30	2.3261
35	2.3371
40	2.3455
45	2.3520
50	2.3572
100	2.3809
500	2.4000
1000	2.4024
10000	2.4046



Queste coppie di valori saranno utilizzate più avanti nel confronto grafico fra soluzioni esatte e soluzioni approssimate.

7. CONFRONTO FRA SOLUZIONI APPROSSIMATE E SOLUZIONI ESATTE

Condizioni al contorno di I e II tipo

Mettiamo a confronto la soluzione approssimata, ottenuta col metodo integrale, con la soluzione esatta, espressa in termini di funzioni di Bessel, riferite al problema con condizioni al contorno di I e II tipo:

$$\theta^*(r) = \frac{2}{8-m^2}(1-r^2) \quad \text{Temperatura adimensionale "approssimata"}$$

$$\theta(r) = \frac{J_0(r \cdot m)}{m^2 J_0(m)} - \frac{1}{m^2} \quad \text{Temperatura adimensionale "esatta"}$$

La soluzione $\theta^*(r)$ approssima la soluzione esatta $\theta(r)$ tanto meglio quanto minore è il valore del parametro m , vale a dire quanto più è lontano dal valore critico di instabilità trovato in precedenza con la soluzione esatta:

$$\underline{m = 2.40483}$$

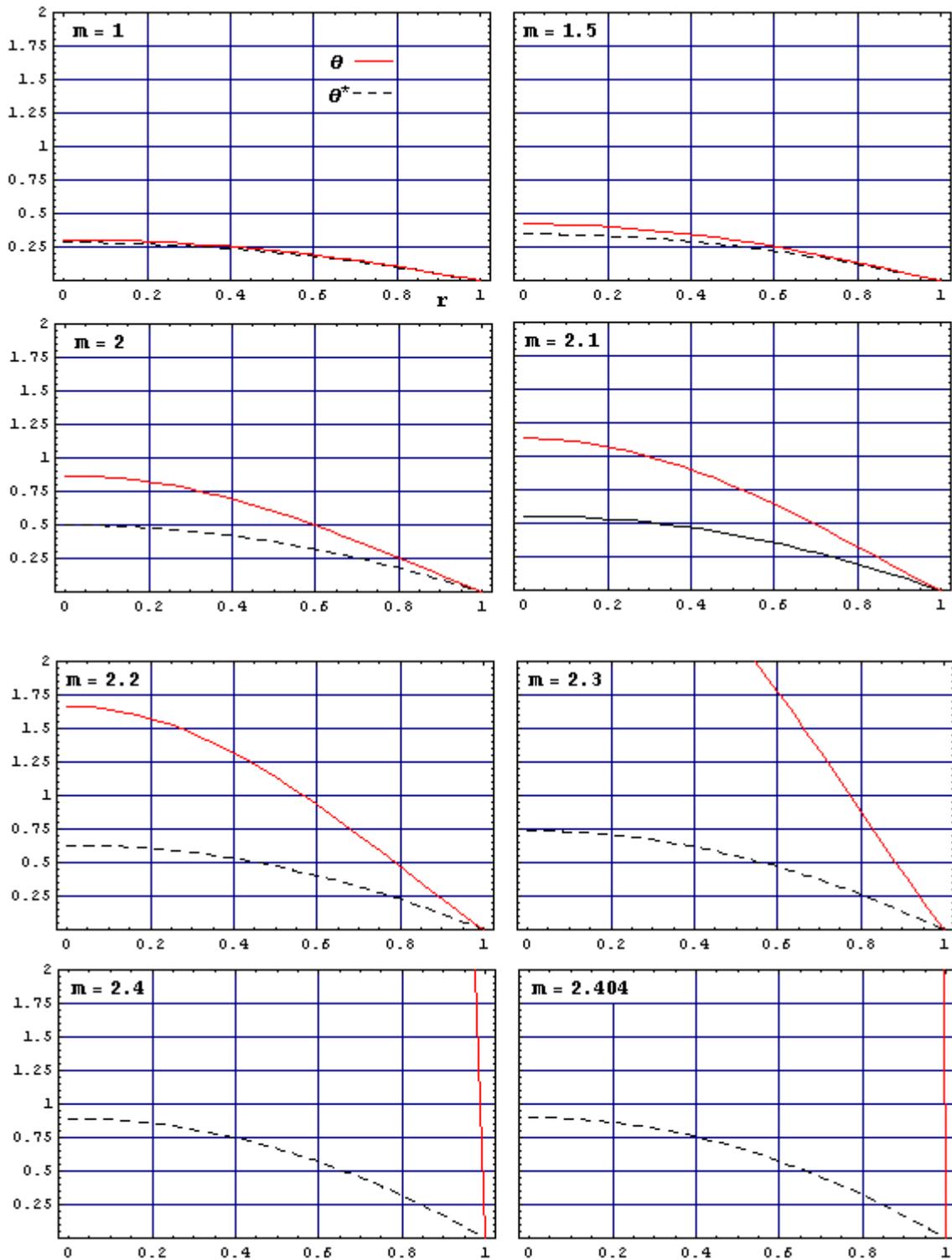
Ciò è dovuto al fatto che la soluzione approssimata presenta un valore critico del parametro m minore di quello della soluzione esatta, quindi quando questa comincia ad assumere valori che tendono all'infinito la soluzione approssimata è ancora lontana dalla "zona asintotica".

Tale conclusione si può ritrovare per via grafica, mettendo a confronto gli andamenti della temperatura esatta e di quella approssimata per valori crescenti di m , sempre più vicini al valore critico esatto.

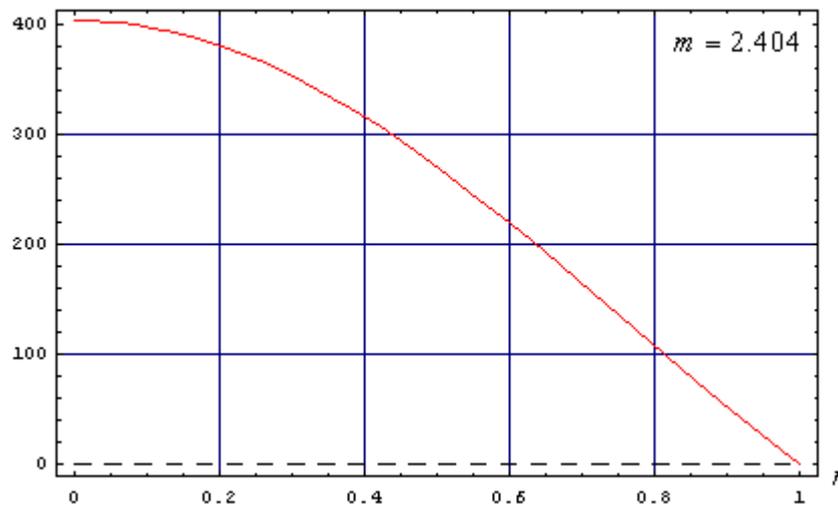
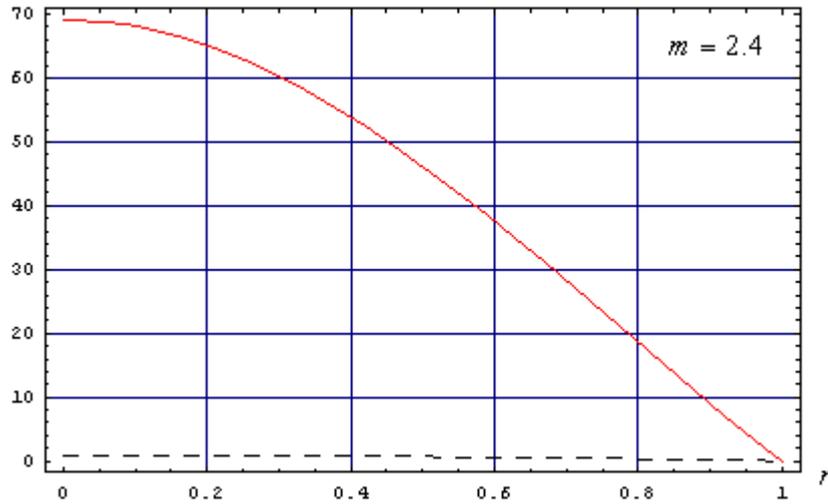
Dai grafici riportati di seguito si può vedere che per valori di m minori o uguali dell'unità l'andamento approssimato praticamente coincide con quello esatto; per valori di m superiori a all'unità, invece, l'andamento approssimato comincia a discostarsi da quello esatto.

Per valori di m inferiori a 2 la differenza fra le due curve può essere ancora trascurata, oltre, invece, le due curve si discostano in maniera significativa e quindi la soluzione approssimata non risulta più attendibile.

1) Soluzione approssimata e soluzione esatta a confronto



Il forte scostamento tra le due curve per valori di m superiori a 2 si può notare meglio su grafici con diverse scale:



Per $m=2.4$ si trova:

$$\theta_{\max} = 69.06$$

$$\theta_{\max}^* = 0.89$$

$$\theta_{\max} - \theta_{\max}^* = 68.17$$

Per $m=2.404$ si trova:

$$\theta_{\max} = 403.49$$

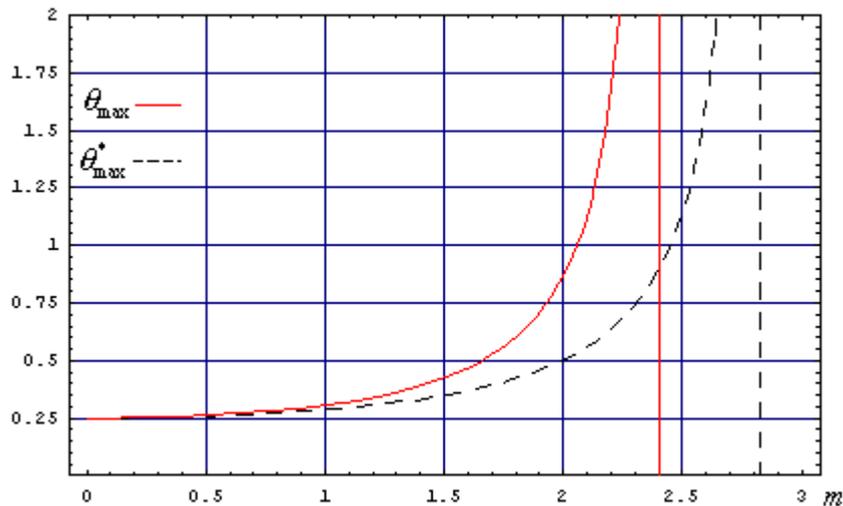
$$\theta_{\max}^* = 0.90$$

$$\theta_{\max} - \theta_{\max}^* = 402.59$$

Dai grafici si vede inoltre che la differenza che esiste fra le temperature esatte e quelle approssimate, è maggiore tra quelle a $r=0$, cioè tra quelle massime. Ciò può essere messo in evidenza riportando le temperature massime, esatta e approssimata, in funzione di m :

$$\theta_{\max}^* = \frac{2}{8-m^2}$$

$$\theta_{\max} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{J_0(m)} - 1 \right)$$



Il grafico chiarifica inoltre il discorso sul valore asintotico cui si faceva cenno prima: si vede come la soluzione approssimata incontri il suo asintoto dopo la soluzione esatta e per questo, quando già la soluzione esatta tende all'infinito, la soluzione approssimata fornisce ancora valori finiti.

Tutto ciò si ripercuote naturalmente sui criteri di stabilità, corrispondenti proprio alle ascisse degli asintoti:

$$i) \text{ Criterio esatto: } m < 2.405$$

$$\text{Criterio approssimato: } m < \sqrt{8} = 2.828$$

L'errore che si commette nell'utilizzare il criterio approssimato è del 15%:

$$\text{Errore} = 1 - \frac{2.404}{2.828} = 0.1499$$

Condizioni al contorno di II e III tipo

Mettiamo a confronto la soluzione approssimata ottenuta col metodo integrale con la soluzione esatta espressa in termini di funzioni di Bessel, nel problema con condizioni al contorno di II e III tipo:

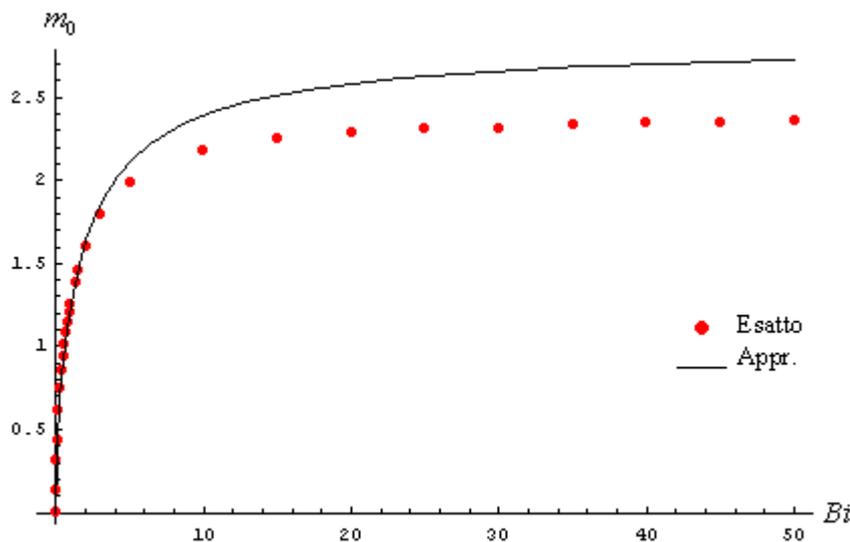
$$\theta^*(r) = \left(r^2 - \frac{2+Bi}{Bi} \right) \cdot \frac{2Bi}{4m^2 + m^2 Bi - 8Bi} \quad \text{Temperatura adimensionale "approssimata"}$$

$$\theta(r) = \frac{Bi \cdot J_0(r \cdot m)}{m^2 (Bi \cdot J_0(m) - m J_1(m))} - \frac{1}{m^2} \quad \text{Temperatura adimensionale "esatta"}$$

In questo caso il valore critico del parametro m dipende, sia per la soluzione esatta sia per quella approssimata, dal valore assunto dal numero di Biot. Anche in questo caso si ha che il valore critico esatto risulta inferiore di quello approssimato, quindi si può ripetere il discorso sugli asintoti fatto in precedenza. Tuttavia la dipendenza dal numero di Biot introduce un nuovo aspetto da considerare, infatti, è interessante osservare che la differenza tra il valore critico esatto e approssimato, e quindi l'errore che si commette nell'utilizzare il criterio approssimato, aumenta all'aumentare del Bi . Per mettere in evidenza quanto detto si riportano in via grafica i criteri di stabilità, critico e approssimato, rispetto al Bi .

$$ii) \quad \text{Criterio esatto } m < m_0 : [Bi \cdot J_0(m) - m \cdot J_1(m)] \Big|_{m=m_0} = 0$$

$$\text{Criterio approssimato } m < \sqrt{\frac{8Bi}{4+Bi}}$$



Mentre il criterio approssimato si presenta in forma esplicita rispetto al Bi il criterio esatto non si può porre in forma esplicita ed i punti riportati sul diagramma corrispondono alle coppie ricavate e tabellate a pag. 37.

Dalla figura si può vedere che per Bi inferiori a 10 i due criteri sono praticamente identici, oltre questo valore, invece, cominciano a divergere.

In particolare per via analitica si può vedere che:

- Per $Bi \rightarrow 0$ sia il criterio approssimato sia quello esatto fornisce $m_0=0$. Quindi i due criteri coincidono perfettamente.
- Per $Bi \rightarrow \infty$ i criteri, come abbiamo visto volta per volta, tendono ai rispettivi del caso con condizioni al contorno di I e II tipo, quindi anche l'errore tende a quello trovato nelle condizioni di I e II tipo.

In definitiva possiamo affermare che l'errore che si commette nel utilizzare il criterio approssimato con condizioni al contorno di II e III tipo è inferiore o uguale a quello che si commette con condizioni al contorno di I e II tipo, e dipende dal numero di Biot:

$$0 \leq \text{Errore} \leq 15\%$$

Tuttavia poiché il numero di Biot nel caso dei conduttori assume valori molto minori dell'unità, come vedremo nell'esempio pratico, l'errore che si commette nell'utilizzare il criterio approssimato nel caso di condizioni al contorno di II e III tipo è praticamente nullo.

8. ESEMPIO NUMERICO

Consideriamo un conduttore di rame di raggio R_e attraversato da una corrente continua di intensità I .

$$R_e = 0.005 \text{ m} \quad I = 150 \text{ A} \quad J = \frac{I}{A} = 1.9 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad \Delta T_{rif} = \frac{R_e^2 \cdot J^2 \cdot \rho_0}{k} = 0.004 \text{ K}$$

Proprietà del rame

$$\delta = 8933 \text{ Kg/m}^3$$

$$c = 385 \text{ J/KgK}$$

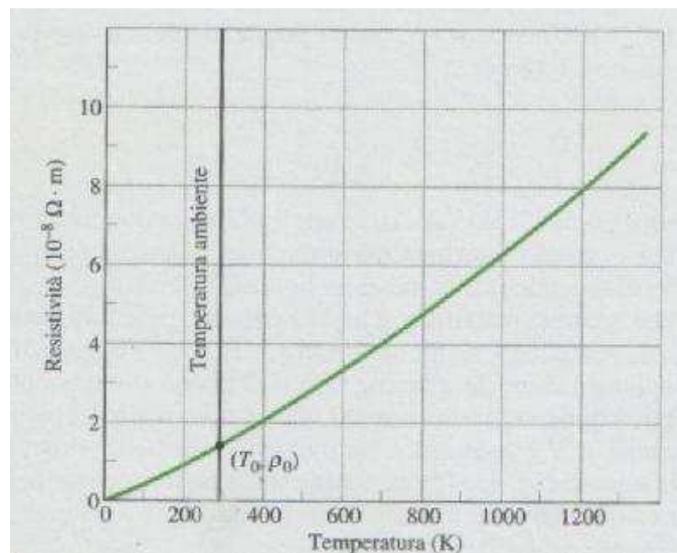
$$k = 400 \text{ W/mK}$$

$$T_M = 1358 \text{ K} \quad (\text{Temperatura di fusione})$$

$$T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C} \quad (\text{Temperatura ambiente})$$

$$\rho_0 = 1.69 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m}$$

$$\beta = 7.3 \cdot 10^{-11} \text{ } \Omega\text{m/K}$$



$$m = J \cdot R_e \cdot \sqrt{\frac{\beta}{k}} = 0.004$$

Come avevamo anticipato, il parametro m assume in condizioni di normale esercizio valori molto bassi.

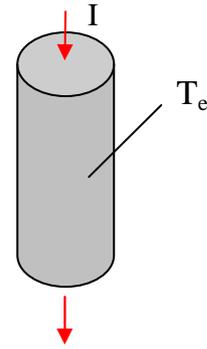
Condizioni al contorno di I e II tipo

La temperatura della parete è fissa a T_e

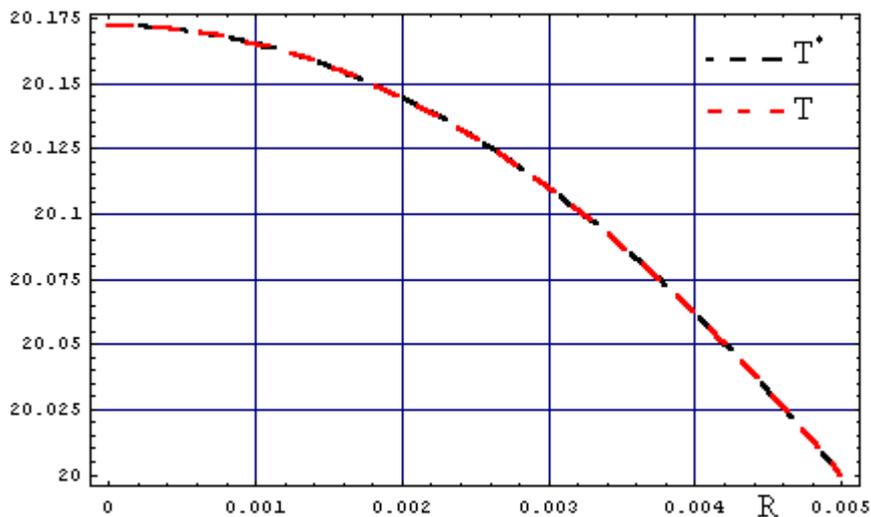
$$T_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

iii) Criterio esatto: $m < 2.405$

Criterio approssimato: $m < \sqrt{8} = 2.828$



Nonostante l'elevata intensità della corrente elettrica, siamo molto lontani dalle condizioni critiche, infatti dalla figura seguente si può vedere che la temperatura massima è di poco superiore a quella alla parete. Inoltre la soluzione approssimata praticamente coincide con quella esatta.



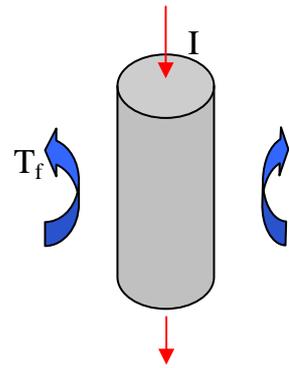
Condizioni al contorno di II e III tipo

Il conduttore è raffreddato ad aria, per mezzo da una ventola: convezione forzata.

$$T_f = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\alpha = 10^2 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot R_e}{k} = 0.00125$$



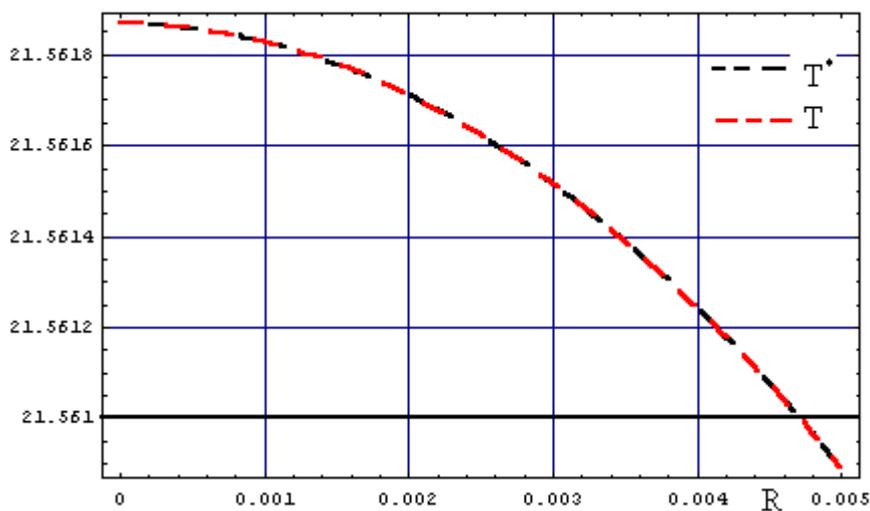
$$iv) \text{ Criterio esatto } m < m_0 : [Bi \cdot J_0(m) - m \cdot J_1(m)] \Big|_{m=m_0} = 0$$

Ricercando per via numerica la radice della funzione si trova :

$$m < 0.0499923$$

$$\text{Criterio approssimato: } m < \sqrt{\frac{8Bi}{4 + Bi}} = 0.0499922$$

Si osserva come il criterio approssimato praticamente coincide con quello esatto, come era prevedibile visto il valore del numero di Biot, molto minore dell'unità. Anche le curve di temperatura approssimata ed esatta sono coincidenti.



Possiamo concludere, quindi, che nelle applicazioni pratiche la soluzione approssimata coincide con quella esatta fornendo risultati più che soddisfacenti.