

## Introduzione

Obiettivo del presente lavoro è analizzare mediante modelli matematici il campo di temperatura che si genera attorno ad un limone quando è investito da una corrente d'aria a temperatura costante. All'uopo verranno confrontati gli andamenti del campo di temperatura ottenuti attraverso due modelli che considerano rispettivamente la soluzione esatta ed una approssimata (corpo ad elevata conducibilità), e in entrambi si riterrà il limone assimilabile ad una sfera. Infine si valideranno i risultati con i dati ottenuti da prove sperimentali condotte in laboratorio.

## Soluzione esatta campo di temperatura di una sfera

Si consideri una sfera, che a partire da condizioni di temperatura uniforme, venga riscaldata da un fluido che ne lambisce la superficie esterna.

Per ottenere le equazioni che descrivono il problema si esegue un bilancio di energia su di una sezione elementare della sfera, posta al raggio  $R$  e di spessore  $dR$ , si ottiene:

$$\dot{Q}_R - \dot{Q}_{R+dR} = \frac{\partial U}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} dR = -\frac{\partial}{\partial R} \left( -k * 4\pi R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) = \rho c * 4\pi R^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

Da cui, svolgendo la derivata a primo membro, si ottiene:

$$4\pi k \left( 2R \frac{\partial T}{\partial R} + R^2 \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} \right) = \rho c * 4\pi R^2 \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow$$
$$\frac{2}{R} T_R + T_{RR} = \frac{1}{\alpha} T_t$$

L'equazione di bilancio trovata, va corredata con un opportuno set di condizioni a contorno, che sono:

$$T_R(0, t) = 0$$
$$-kT_R(R_0, t) = h(T(R_0, t) - T_f)$$
$$T(R, 0) = T_i$$

Ove si sia indicato con  $R_0$  il raggio della sfera, con  $T_i$  la temperatura uniforme iniziale della stessa e con  $T_f$  la temperatura del fluido che la lambisce.

Al fine di ridurre il numero di parametri da cui dipende la funzione incognita  $T$  si procede all'adimensionalizzazione. A tal fine si definiscono le seguenti grandezze adimensionali:

$$r = \frac{R}{R_0}; \tau = \frac{t}{t_{rif}}; \vartheta = \frac{T - T_f}{T_i - T_f}$$

Il tempo di riferimento si lascia al momento incognito, salvo poi definirlo opportunamente nella adimensionalizzazione.

Il set di equazioni adimensionali cui si perviene è il seguente:

$$\begin{aligned}\frac{2}{r}\theta_r + \theta_{rr} &= \theta_\tau \\ \theta_r(0, \tau) &= 0 \\ \theta_r(1, \tau) &= -Bi\theta(1, \tau) \\ \theta(r, 0) &= 1\end{aligned}$$

Per ragioni di “pulizia formale” si è posto  $t_{rif} = \frac{R_0^2}{\alpha}$ ; e si è definito  $Bi = \frac{hR_0}{k}$

Si sottolinea come le equazioni trovate siano tutte lineari ed omogenee ad eccezione dell’equazione che rappresenta la condizione iniziale. Queste sono le condizioni per cui la soluzione può essere ricercata mediante il metodo di separazione delle variabili.

Si esamina quindi il sottoproblema lineare ed omogeneo definito dalle tre equazioni lineari e omogenee e si ricerca una soluzione particolare data dal prodotto di due funzioni, una della sola  $r$  e l’altra della sola  $\tau$ :

$$\theta(r, \tau) = P(r)S(\tau)$$

Imponendo tale soluzione si ottiene:

$$\begin{aligned}P'' + \frac{2}{r}P' + \lambda^2 P &= 0 & \text{ed} & \quad S'' + \lambda^2 S = 0 \\ r^2 P'(0) &= 0 & & \quad S(0) = 1 \\ P'(1) &= -BiP(1)\end{aligned}$$

Si riconosce che la soluzione per la  $S$  è un esponenziale negativo del tempo (la scelta di una costante negativa  $-\lambda^2$  è proprio legata alla necessità di avere soluzioni non divergenti per tempi infiniti).

In relazione al sistema in  $P$ , si può operare in due modi distinti.

### Funzioni di Bessel

Si introduca la seguente variabile:

$$P = \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{1/2} J(\lambda r)$$

Sostituendo nell’equazione si giunge all’equazione di Bessel:

$$\lambda^2 r^2 J'' + \lambda r J' + \left(\lambda^2 r^2 - \frac{1}{4}\right) J = 0$$

Che si riconduce a

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0$$

Con  $x = \lambda r$  e  $\nu = \pm 1/2$ .

Soluzione dell’equazione di Bessel è:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

Particolarizzando la somma al caso in esame otteniamo:

$$J_{\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\lambda r)^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \sin(\lambda r)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\lambda r)^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \cos(\lambda r)$$

In definitiva quindi otteniamo le seguenti funzioni:

$$P_{\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi \lambda r}\right)} \sin \frac{(\lambda r)}{r}$$

$$P_{-\frac{1}{2}}(\lambda r) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi \lambda r}\right)} \cos \frac{(\lambda r)}{r}$$

pertanto possiamo scrivere:

$$P(r) = \frac{A}{r} \sin(\lambda r) + \frac{B}{r} \cos(\lambda r)$$

### Formulazione di Eulero

Nell'equazione iniziale compare il prodotto della funzione incognita per la variabile indipendente, questo suggerisce di risolvere l'equazione attraverso la posizione:

$$P = \frac{\phi}{r}$$

mediante cui è possibile ricondurre l'equazione ad una a coefficienti costanti. Infatti, operando la sostituzione si perviene a:

$$P' = \frac{(\phi')}{r} - \frac{\phi}{r^2}$$

$$P'' = \frac{(\phi'')}{r} - 2\frac{(\phi')}{r^2} + 2\frac{\phi}{r^3}$$

$$\phi'' + \lambda^2 \phi = 0$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi'(1) = -Bi \phi(1)$$

Si riconosce l'equazione dell'oscillatore armonico che ha integrale generale:

$$\phi = A \sin(\lambda r) + B \cos(\lambda r)$$

Imponendo le condizione a contorno otteniamo:

$$B=0$$

$$\cotg(\lambda) = \frac{1-Bi}{\lambda}$$

Quest'ultima, è l'equazione caratteristica che fornisce gli autovalori  $\lambda$  e le corrispondenti autofunzioni la cui combinazione lineare a convergenza fornisce il valore esatto della funzione.

$$\vartheta(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \frac{A_n}{r} \sin(\lambda_n r)$$

Con i coefficienti  $A_n$  determinati sfruttando la relazione di ortonormalità delle funzioni  $P$ .

$$A_n = \frac{\int_0^1 \theta(r,0) r \sin(\lambda_n r) dr}{\int_0^1 \sin^2(\lambda_n r) dr}$$

### Dimostrazione ortogonalità delle autofunzioni

Moltiplicando la prima equazione per  $P_m$  e la seconda per  $P_n$  si ottiene:

$$r^2 P_n'' P_m + 2r P_n' P_m + r^2 \lambda_n^2 P_n P_m = 0$$

$$r^2 P_m'' P_n + 2r P_m' P_n + r^2 \lambda_m^2 P_m P_n = 0$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$r^2 P_n'' P_m + 2r P_n' P_m + r^2 \lambda_n^2 P_n P_m = r^2 P_m'' P_n + 2r P_m' P_n + r^2 \lambda_m^2 P_m P_n$$

$$r^2 P_n'' P_m - r^2 P_m'' P_n + 2r P_n' P_m - 2r P_m' P_n = r^2 \lambda_n^2 P_n P_m - r^2 \lambda_m^2 P_m P_n$$

Integrando sul dominio di definizione della funzione  $P$ :

$$\int_0^1 (r^2 P_n'' P_m - r^2 P_m'' P_n + 2r P_n' P_m - 2r P_m' P_n) dr = \int_0^1 r^2 (\lambda_n^2 P_n P_m - \lambda_m^2 P_m P_n) dr$$

$$\int_0^1 (r^2 P_n'' P_m - r^2 P_m'' P_n + 2r P_n' P_m - 2r P_m' P_n) dr = (\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 r^2 P_n P_m dr$$

Si riconosce nella funzione integrando a primo membro il differenziale esatto della funzione:

$$(r^2 (P_n' P_m - P_m' P_n))'$$

il cui integrale è evidentemente pari a:

$$[(r^2 (P_n' P_m - P_m' P_n))]_0^1$$

che, date le condizioni al contorno risulta pari a zero per  $n \neq m$ . Risulta così dimostrata l'ortogonalità delle funzioni e ottenuta di conseguenza la funzione peso che definisce la relazione di ortonormalità pari a  $r^2$ .

## Soluzione approssimata: corpo ad elevata conducibilità

Se il corpo presenta un numero di Biot molto minore dell'unità ci si aspetta che la temperatura sia poco variabile all'interno del corpo ad ogni istante del fenomeno e di conseguenza che il modello analitico ne risulti semplificato. Per tempi sufficientemente grandi, dei termini della sommatoria che rappresentano la soluzione esatta resta solo il primo poiché, ciascun termine moltiplica un esponenziale del tempo moltiplicato per una successione di  $\lambda$  crescenti.

Data l'equazione caratteristica:

$$\cotg(\lambda) = \frac{1 - Bi}{\lambda}$$

nell'ipotesi di Biot tendente a zero si ha che anche  $\lambda$  tende a zero e per determinare la relazione funzionale è possibile sviluppare in serie di Taylor le funzioni a primo e secondo membro intorno al primo autovalore:

$$\lambda = \sqrt{\frac{6Bi}{2 + Bi}}$$

Tale espressione mostra come per Bi tendente a zero, vi tenda anche il primo autovalore.

In tale ipotesi:

$$A_0 = \frac{\int_0^1 \theta(r, 0) r \lambda_0 r dr}{\int_0^1 (\lambda_0 r)^2 dr} \sim \frac{1}{\lambda_0}$$

ne segue che per  $\lambda$  tendente a zero si ha:

$$\theta(r, \tau) = A_0 \frac{\sin(\lambda_0 r)}{r} \exp(-\lambda_0^2 \tau) = \frac{\sin(\lambda_0 r)}{\lambda_0 r} \exp(-\lambda_0^2 \tau) = \exp(-\lambda_0^2 \tau) = \theta(\tau)$$

avendo sfruttato il limite notevole  $\lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda_0 r)}{\lambda_0 r} = 1$

A questa conclusione si giunge anche considerando il campo di temperatura indipendente dal raggio ed effettuando un bilancio globale di energia esteso a tutta la sfera:

$$\frac{dU}{dt} = -hA(T - T_f) \rightarrow \rho c V \frac{dT}{dt} = -hA(T - T_f)$$

con condizione al contorno:

$$T(0) = T_i$$

Posto  $\tau^{star} = \frac{t}{t_c}; \theta = \frac{T - T_f}{T_i - T_f}$

Si giunge integrando alla seguente espressione:

$$\theta(\tau_{star}) = e^{-\tau_{star}}$$

ove si è posto  $t_c = \frac{\rho V c}{Ah} = \frac{\rho c R_0}{3h}$

## Dati rilevati in laboratorio

L'apparato sperimentale utilizzato consiste in un condotto in cui passa aria a velocità e temperatura definibili dall'utente mediante dei voltometri connessi a ventole e resistenze. Settando opportunamente i voltometri si è ottenuto un flusso d'aria ad una temperatura di circa 43°C e ad una velocità media di 1,90m/s e deviazione standard pari a 0,6 m/s. Stabilizzatosi il flusso, si sono disposti due limoni su rulli (per omogeneizzare la temperatura sulla loro superficie), di cui uno motore (rotante ad una velocità di 20rpm) e si è attivata la telecamera ad infrarossi per effettuare le rilevazioni di temperatura.

Tale apparecchiatura richiede che siano settati taluni parametri, elencati di seguito:

- temperatura di background: 24°C
- temperatura esterna: 24°C
- emissività del limone: 0.95
- numero di frame: 195
- frequenza di acquisizione: 1 frame ogni 10 secondi.

Le caratteristiche dei limoni sono sintetizzate come segue:

- $k=0.6$  W/mK
- peso: 128g e 123,60g
- volume: 170ml e 150ml
- $c=4200$  J/kgK

dai pesi e volumi misurati si può ricavare un valore medio della densità e il raggio equivalente da usare nei modelli:

- $R_m=3,43$ cm &  $R_m=3,296$ cm
- $\rho=824$ kg/m<sup>3</sup> &  $\rho=753$ kg/m<sup>3</sup>
- velocità rulli: 20rpm, ne deriva una velocità periferica del limone di 0.14 m/s (considerando un rapporto diametro rullo/diametro limone pari a 2)

Dai dati rilevati risulta che

- $Re_D=8389$ ;
- $Pr=0.71$ .

$$Nu = 2 + (0.40Re^{1/2} + 0.06Re^{2/3}) Pr^{2/5} \rightarrow Nu = 55,54 \rightarrow h = 21,05 \frac{W}{Km^2}$$

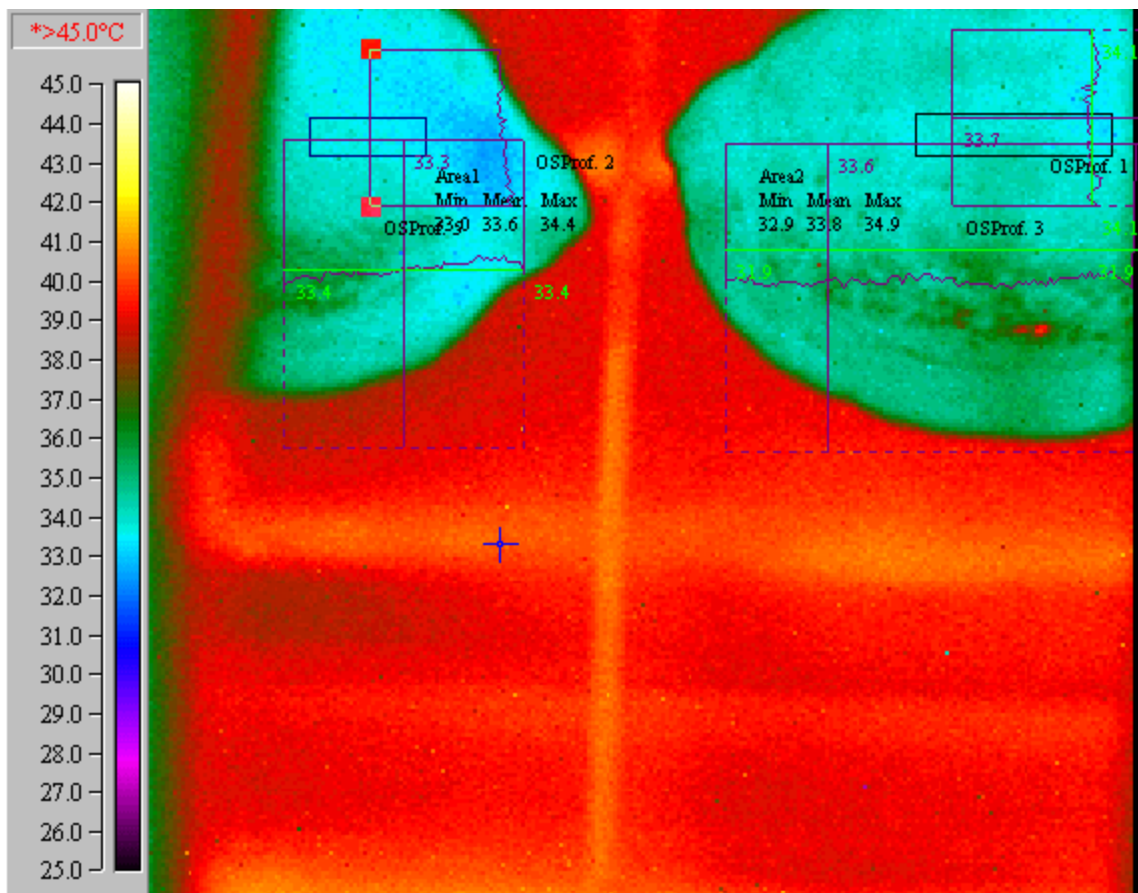
tale formula è stata presa da letteratura ed è valida per  $3.5 < Re < 7.4 \cdot 10^4$ ;  $0.71 < Pr < 380$ , in essa si è trascurato il termine  $\frac{\mu_\infty}{\mu_s}$  che nel nostro caso, data la scarsa variazione di temperatura tra la corrente all'infinito e quella sulla superficie del limone, è approssimativamente pari a 1.

Possiamo a questo punto calcolare:

il numero di Biot:  $Bi = \frac{hR_0}{k_{limone}} = 1,2$

il tempo di riferimento della soluzione esatta:  $t_{rif} = 6786s$

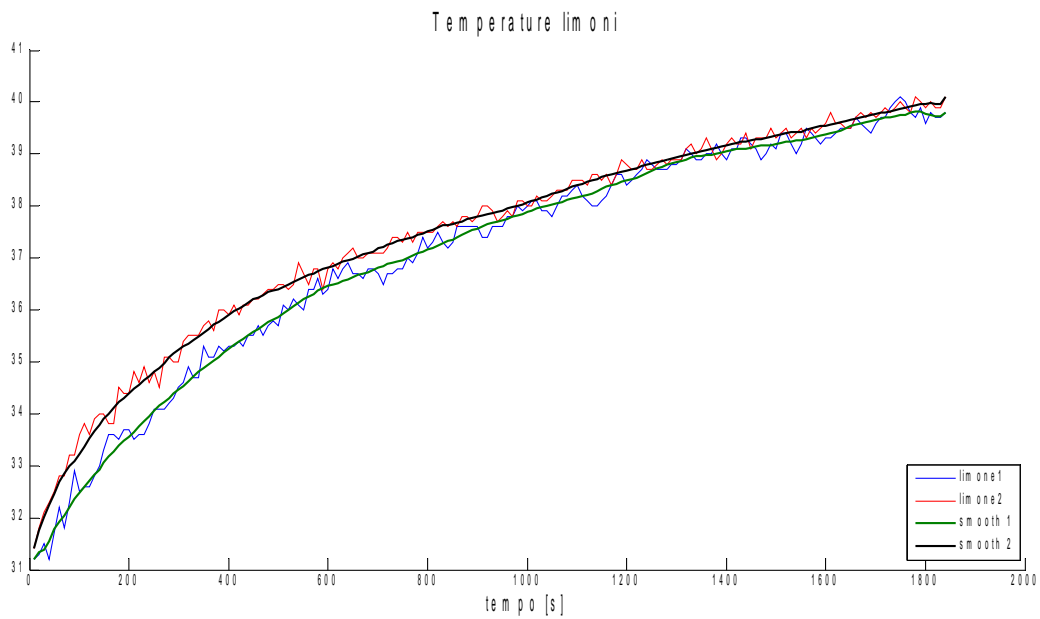
il tempo caratteristico nell'ipotesi di corpo ad elevata conducibilità  $t_c = 1883s$



Nell'immagine si mostra uno dei frame acquisiti dalla fotocamera a infrarossi. Sono evidenziate le aree che sono state considerate nella valutazione della temperatura. Esse sono state scelte tenendo in conto la loro posizione e la distribuzione di temperatura presente. La posizione è importante in quanto a seconda della superficie considerata varia l'emissività percepita dalla termocamera e quindi il valore di temperatura attribuito a tali punti risulta influenzato negativamente. Inoltre è stato valutata la distribuzione di temperatura sui due limoni al fine di scegliere delle aree caratterizzate da una minore variabilità. I valori utilizzati nel presente lavoro sono ottenuti mediando le temperature puntuali rilevate dalla termocamera.

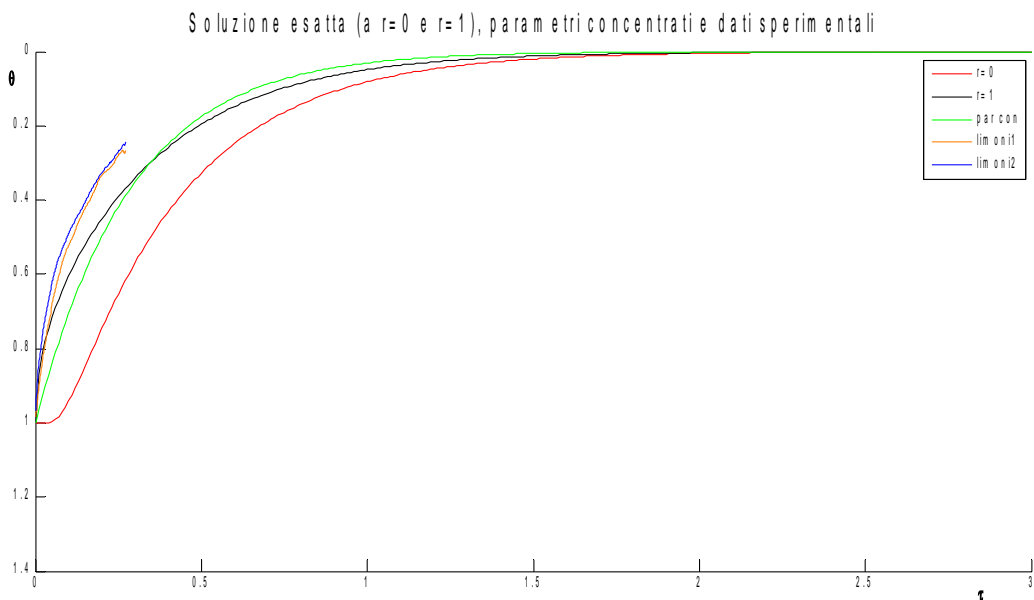
Nonostante ciò l'andamento temporale della temperatura si mostrava fortemente irregolare, probabilmente dovuto al moto impresso ai limoni dai rulli, che produceva una continua variazione della zona rilevata con conseguente variazione delle caratteristiche geometriche delle zone campione e quindi dell'emissività percepita dalla fotocamera.

Si è pertanto eseguito uno smoothing dei dati attraverso una media mobile su 20 dati.



## Analisi dei risultati

Nella figura sottostante sono portati i risultati dei modelli sopraesposti confrontati con i risultati sperimentali. Per confrontare i risultati dei modelli a parametri concentrati e la soluzione esatta è stato necessario rappresentare la soluzione del modello a parametri concentrati in funzione del



tempo adimensionale utilizzato per la soluzione esatta.

$$\tau^{star} = \tau \frac{t_{rif}}{t_c} \rightarrow \tau^{star} = \tau * 3Bi$$

per tale ragione al variare di Biot la curva viene più o meno stirata; in particolare per Biot crescenti il valore praticamente unitario viene raggiunto più rapidamente. Per quanto concerne le curve



relative ad  $r=1$  ed  $r=0$  del modello esatto, al variare di Biot esse tendono auspicabilmente ad avvicinarsi od allontanarsi (per  $Bi$  tendente a zero coincidenti). Per tale ragione non si ha una posizione relativa fissa tra le curve menzionate ma varia col il valore assunto dal Biot. Tuttavia in termini dimensionali resta verificato il fatto che in entrambi i casi il bilancio globale di energia è soddisfatto: infatti il modello a parametri concentrati si basa proprio su tale bilancio globale che viene rispettato evidentemente anche dal metodo esatto. In entrambi i casi può essere calcolato come:

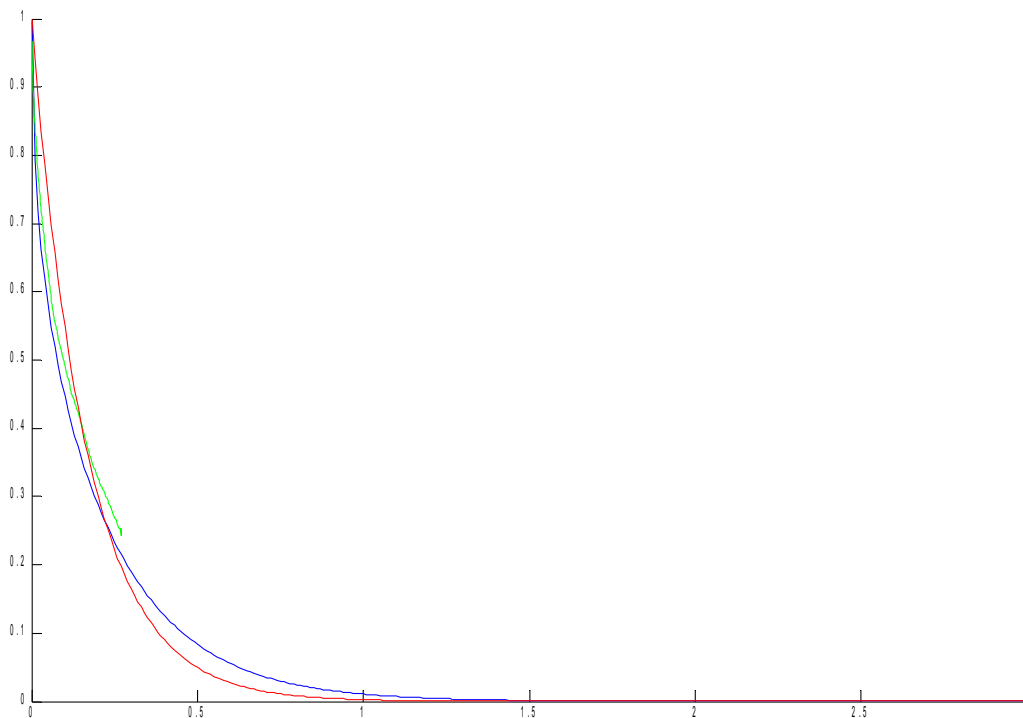
$$\int_0^1 h(T - T_f) 4\pi r^2 dt$$

dove  $T$  nel caso del modello esatto è la  $T(R=R_0, t)$ , il valore calcolato numericamente in entrambi i casi risulta coincidente e pari a **7333 J**.

Come può notarsi dalla figura i dati sperimentali si trovano al di sopra delle curve ricavate dai modelli. Ciò è imputabile a varie cause, particolarmente due:

- l'acquisizione della temperatura all'interno del condotto, date le caratteristiche turbolente del flusso, sembra essere notevolmente dipendente dal punto di acquisizione della velocità. Questo significa che il valore di  $h$  calcolato è valido quale ordine di grandezza (tenendo inoltre conto che tale formula si riferisce a determinate prove fatte a date condizioni al contorno e di geometria non perfettamente riprodotte nella prova effettuata).
- La temperatura rilevata dalla termocamera è notevolmente influenzata dal fenomeno di emissione delle pareti del condotto, funzione della temperatura delle stesse. Si suppone che in questo caso si sia sottostimato il valore della temperatura delle pareti e quindi la fotocamera nella sua elaborazione abbia sovrastimato l'energia termica emessa dal limone per irraggiamento.

In merito al primo punto si è condotto un tuning del parametro  $h$  al fine che il modello riproducesse più accuratamente i dati sperimentali. Nella figura successiva si mostra il risultato per  $h=35W/Km^2$

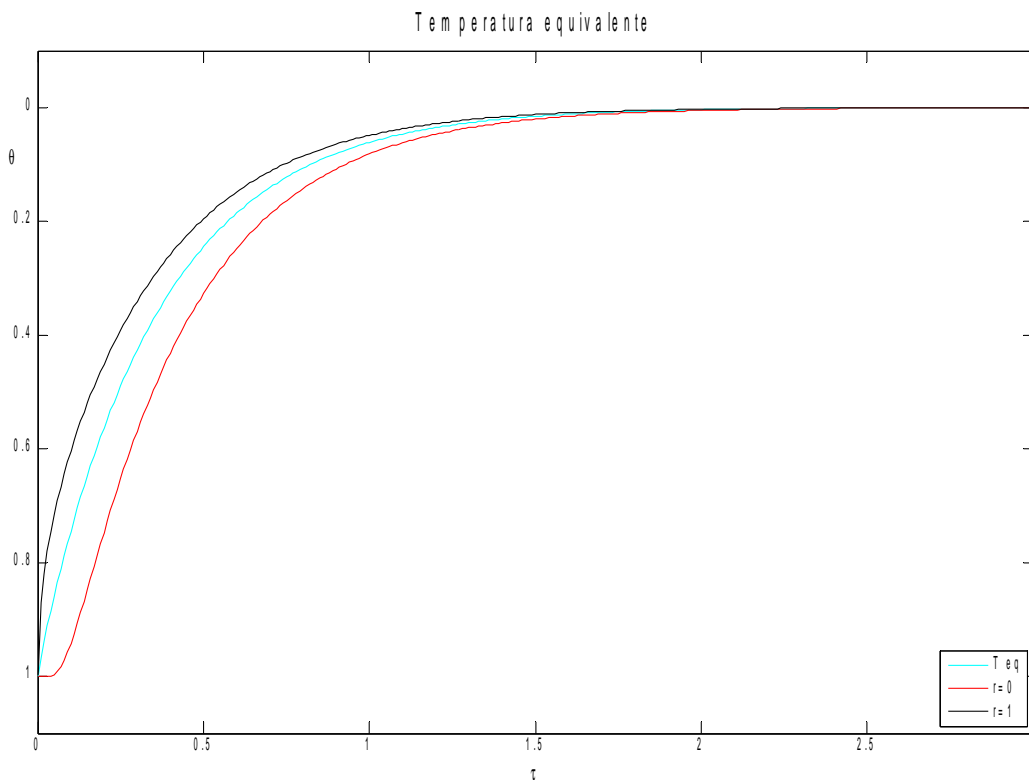


Comprese le difficoltà e le semplificazioni introdotte dai due modelli risulta di particolare interesse industriale e tecnico comprendere quando sia possibile utilizzare il modello a parametri concentrati in luogo del modello esatto più oneroso computazionalmente. Ciò che vogliamo ottenere è conoscere i valori di Bi per i quali la i tempi caratteristici dei due modelli sono paragonabili permettendo quindi di preferire il modello a parametri concentrati.

A tal fine si è pensato che fosse più opportuno confrontare la temperatura del modello a parametri concentrati con una temperatura equivalente ricavata dal modello esatto. Tale temperatura è stata definita come una sorta di temperatura adiabatica di tazza, nel senso che è stata determinata imponendo che l'energia complessiva, supponendo il limone a temperatura costante (pari a quella equivalente), fosse uguale all'energia effettivamente presente.

$$\rho c V \bar{T} = \int \rho c 4 \pi r^2 T dr$$

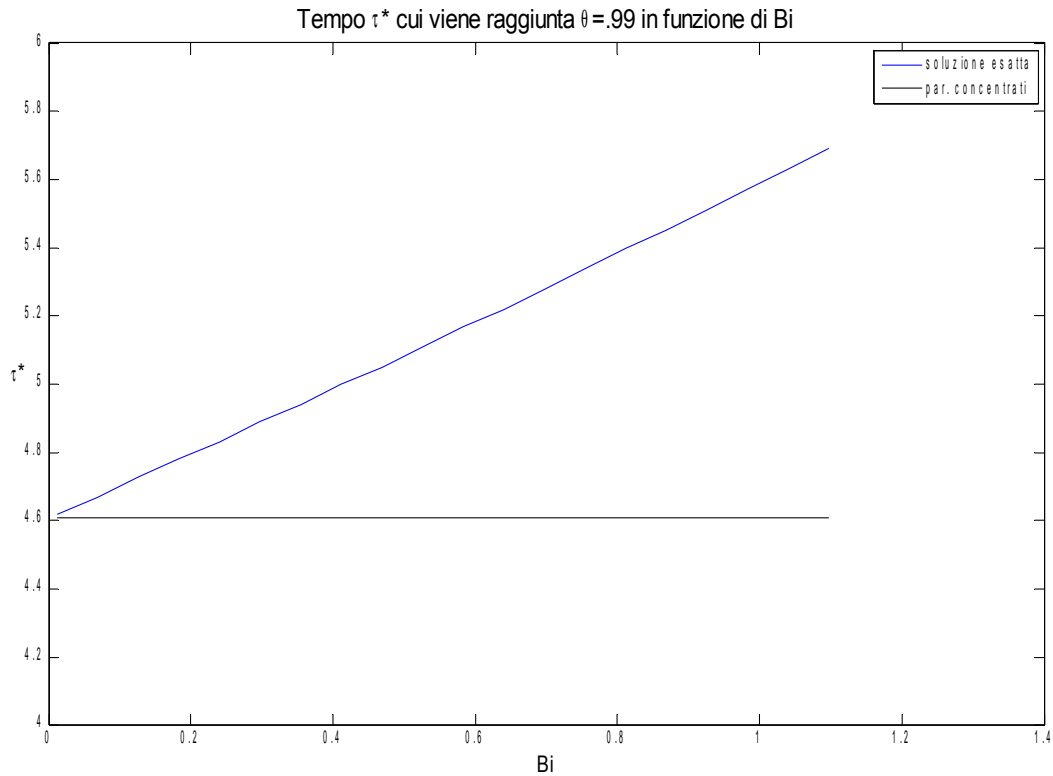
Si riporta l'andamento, nel nostro caso, della temperatura equivalente definita rispetto alle temperatura ad  $r=1$  ed  $r=0$



.Come nel caso precedente, nasce la necessità di riportare ad un comune asse dei tempi le due funzioni di temperatura. Si è optato per adimensionalizzare i tempi rispetto a  $t_c$ , in quanto tale tempo nella realtà non dipende da Bi, e si facendo nel grafico ne risulterà effettivamente indipendente.

Le curve mostrate in figura rappresentano al variare di Bi il tempo adimensionale in corrispondenza del quale la temperatura raggiunge il 99% del valore asintotico. Tale grafico conferma che per Bi tendente a zero i modelli hanno tempi caratteristici coincidenti e fornisce all'ingegnere la possibilità di valutare l'errore che commette adoperando il modello a parametri concentrati rispetto al modello esatto.

Si nota che l'andamento della curva blu è circa lineare e che per una variazione unitaria di Bi si ha una variazione della stessa entità del tempo adimensionale del modello esatto rispetto quello a parametri concentrati, che quantitativamente, considerando che  $t_c$  è pari a 1883 s, produce una sottostima di circa 30 min.



## Appendice

Si riportano in appendice i codici sviluppati in ambiente di lavoro Matlab<sup>®</sup>.

### Calcolo autovalori

```
function [lambda,fval,exitflag]=calcololambda
for z=1:50
    [lambda(z),fval(z),exitflag(z)]=fminbnd(@caratteristica,(z-1)*pi,z*pi);
end
```

```
function R=caratteristica(lambda)
global Bi i
R=abs(cot(lambda)-(1-Bi(i)))/lambda);
end
```

### Calcolo coefficienti modello esatto

```
function [A]=calcoloA(lambda)
syms r
for f=1:50
    A(f)=eval(int(1*(sin(lambda(f)*r))*r,r,0,1)/int((sin(lambda(f)*r))^2,r,0,1))
;
end
end
```

## **Temperatura modello esatto**

```
function [T]=Temp_r(r,A,lambda)
T=0;
tau=[0:.01:3];
for i=1:100
T=T+A(i)*(sin(lambda(i)*r)./r).*exp(-lambda(i)^2*tau);
end
hold on
plot(tau,T,'r');
end
```

```
function [T]=Temp_t(t,A,lambda)
T=0;
r=[0.01:.01:1];
for i=1:100
T=T+A(i)*(sin(lambda(i)*r)./r).*exp(-lambda(i)^2*t);
end
plot(r,T);
end
```

## **Temperatura parametri concentrati**

```
function testt
global A lambda
INTes=dblquad(@Temp_int,0,1,0,3);
end
```

## **Valutazione Temperatura equivalente**

```
function [taus]=Temp_r2(A,lambda)
global h i
T=0;
tc=4200*.0343*824/3/h(i);
trif=6786;
taustar=trif/tc;
tau=[0:.01:10];
Tmed=1;
j=1;
while Tmed>.01 || j>length(tau)
INTes=quad(@Temp_int,0.01,1);
Tmed=3*INTes;
j=j+1;
end

function [T]=Temp_int(r)
T=0;
for p=1:50
T=T+A(p)*(sin(lambda(p)*r)./r).*exp(-lambda(p)^2*tau(j)/taustar).*r.*r;
end
end
taus=tau(j-1);
end
```

## Valutazione integrale

```
function testint
global A lambda Bi
lambda=calcololambda;
A=calcoloA(lambda);
INTes=quad(@Temp_int,0,50)
INTpc=quad(@Temp_intpc,0,50)
function [T]=Temp_int(tau)
    T=0;
    r=1;
    for i=1:50
        T=T+A(i)*(sin(lambda(i)*r)./r).*exp(-lambda(i)^2*tau);
    end
end

function [Tpc]=Temp_intpc(tau)
    tc=4200*.0343*824/3/20.31;
    trif=6786;
    taustar=trif/tc;
    Tpc=exp(-tau*taustar);
end
end
```

## Tuning h

```
function [Bi]=tuningh
global Bi h i
h=[.2:1:20];
for i=1:length(h)
    Bi(i)=.0343/.6*h(i);
    lambda=calcololambda;
    A=calcoloA(lambda);
    t(i)=Temp_r(1,A,lambda);
end
end
```