

Università degli Studi di Salerno

Dipartimento di Ingegneria Meccanica



Corso di

“ Trasmissione del calore “
prof. G.Cuccurullo

Moto laminare in condotti:

**analisi termica nella zona
completamente sviluppata**

Luca Talamo 06203000019

Michele Novella 06203000018

anno accademico 2006/2007

Sommario

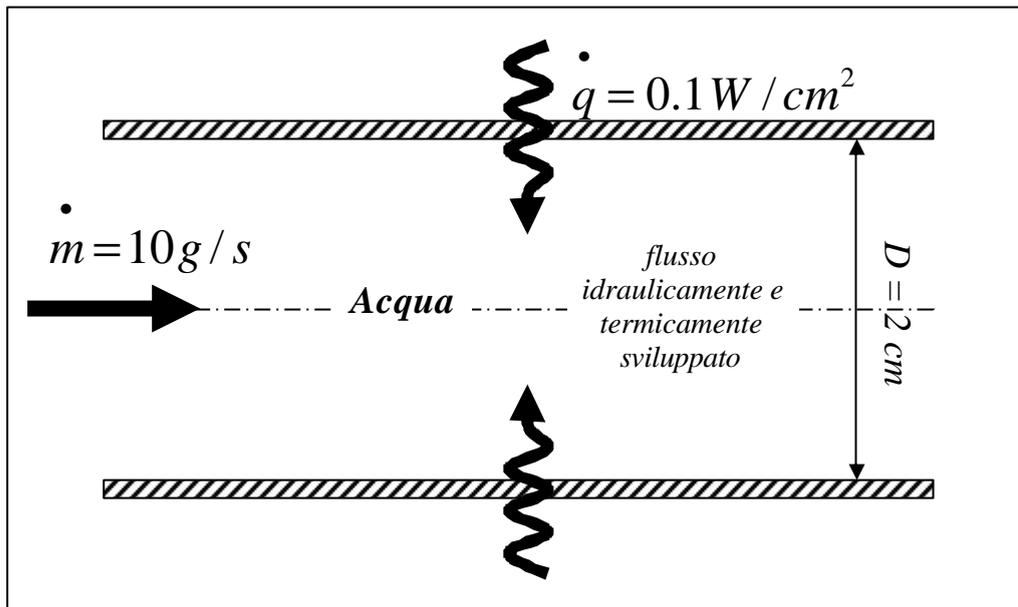
Sommario	2
Traccia	3
1 Flusso costante alla parete	4
1.1 Ipotesi di flusso isoterma e proprietà dell'acqua	4
1.2 Calcolo del numero di Reynolds	5
1.3 Cenni sul concetto di strato limite	6
1.4 Calcolo del numero di Prandtl	8
1.5 Determinazione del profilo di temperatura adimensionale e calcolo del numero di Nusselt	9
1.6 Determinazione del profilo di temperatura dimensionale	14
1.7 Verifica dell'ipotesi di flusso isoterma	16
2 Temperatura costante alla parete	20
2.1 Determinazione del profilo di temperatura adimensionale e calcolo del numero di Nusselt (metodo delle approssimazioni successive)	20
2.2 Determinazione del profilo di temperatura dimensionale	25
2.3 Calcolo della potenza termica scambiata	30
2.4 Verifica dell'ipotesi di flusso isoterma	33
3 Applicazioni tecniche	39
3.1 Pompa di calore	39
3.2 Condensatore	43
3.3 Dimensionamento di un condensatore coassiale	46
Appendice	50
A.1 Script del metodo delle approssimazioni successive	50
A.2 Analisi di convergenza del metodo delle approssimazioni successive	52
A.3 Soluzione ottenuta con $\mathbf{J}(r)$ di tentativo pari a 1	55
A.4 Bulk temperature al variare della lunghezza del condotto nel caso di temperatura imposta alla parete	55
A.5 Script per il calcolo di L_{IT} al variare della lunghezza del condotto nel caso di temperatura imposta alla parete	55
Bibliografia	57

Traccia

- *Una corrente di acqua a temperatura ambiente è riscaldata fluendo attraverso un tubo ($D=2\text{cm}$) con $q_w=0.1\text{ W/cm}^2$. Supponendo il flusso idraulicamente e termicamente sviluppato e sapendo che la portata massica è 10 g/s , si rappresenti l'evoluzione dei profili di temperatura, dimensionali ed adimensionali.*
- *Si ripeta lo studio ipotizzando di riscaldare il fluido con temperatura di parete costante $T_w=45^\circ\text{C}$.*

1

Flusso costante alla parete



1.1 Ipotesi di flusso isoterma e proprietà dell'acqua

Nella seguente tabella si riportano le proprietà dell'acqua allo stato liquido e a temperatura ambiente (20°C) necessarie allo studio del campo di temperatura. Nel seguito si farà l'ipotesi di flusso isoterma, ovvero tali proprietà, in generale funzione della temperatura, si considereranno costanti.

Densità	ρ	998.1 kg/m^3
Viscosità cinematica	ν	$9.94 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$
Calore specifico	c	4182.5 J/kg K
Conducibilità termica	k	0.6 W/m K

1.2 Calcolo del numero di Reynolds

Il tipo di regime, laminare o turbolento, che si instaura nel condotto è discriminato dal valore che assume il numero di Reynolds. Il moto assume laminare per $Re_D < 2300$; si tiene a precisare come tale valore non può essere inteso come un valore critico di transizione dal moto laminare al turbolento, in quanto tale passaggio dipende da vari fattori che generano instabilità del flusso, quali la rugosità superficiale, la curvatura del condotto e l'intensità di turbolenza presente nel fluido all'imbocco del tubo. Come velocità di riferimento si assume la velocità di ingresso del fluido U_i , supposto uniforme il profilo di velocità all'imbocco; infatti si dimostra tramite un bilancio di massa come questa sia uguale alla velocità media \bar{U} lungo l'intero condotto nell'ipotesi di fluido incomprimibile:

$$\dot{m}(x=0) = \dot{m}(x)$$

$$\dot{m}(x=0) = r U_i p \frac{D^2}{4}$$

$$\dot{m}(x) = \int_0^R 2p R r U dr = r \bar{U} p \frac{D^2}{4}$$

da cui $U_i = \bar{U}$. In particolare, nota la portata massica e la geometria del condotto si ottiene:

$$U_i = \frac{\dot{m}}{r p \frac{D^2}{4}} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{997 \cdot p \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} = 0.03 \text{ m/s}$$

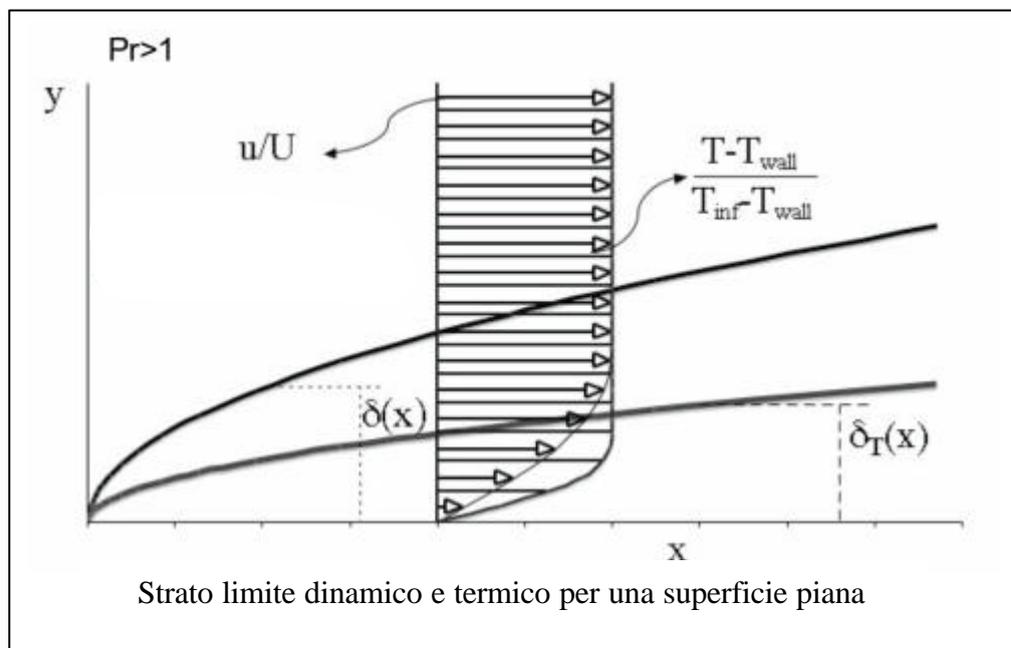
Quindi il numero di Reynolds sarà:

$$Re_D = \frac{U_i D}{\nu} = \frac{0.03 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{9.94 \cdot 10^{-7}} = 604 < 2300$$

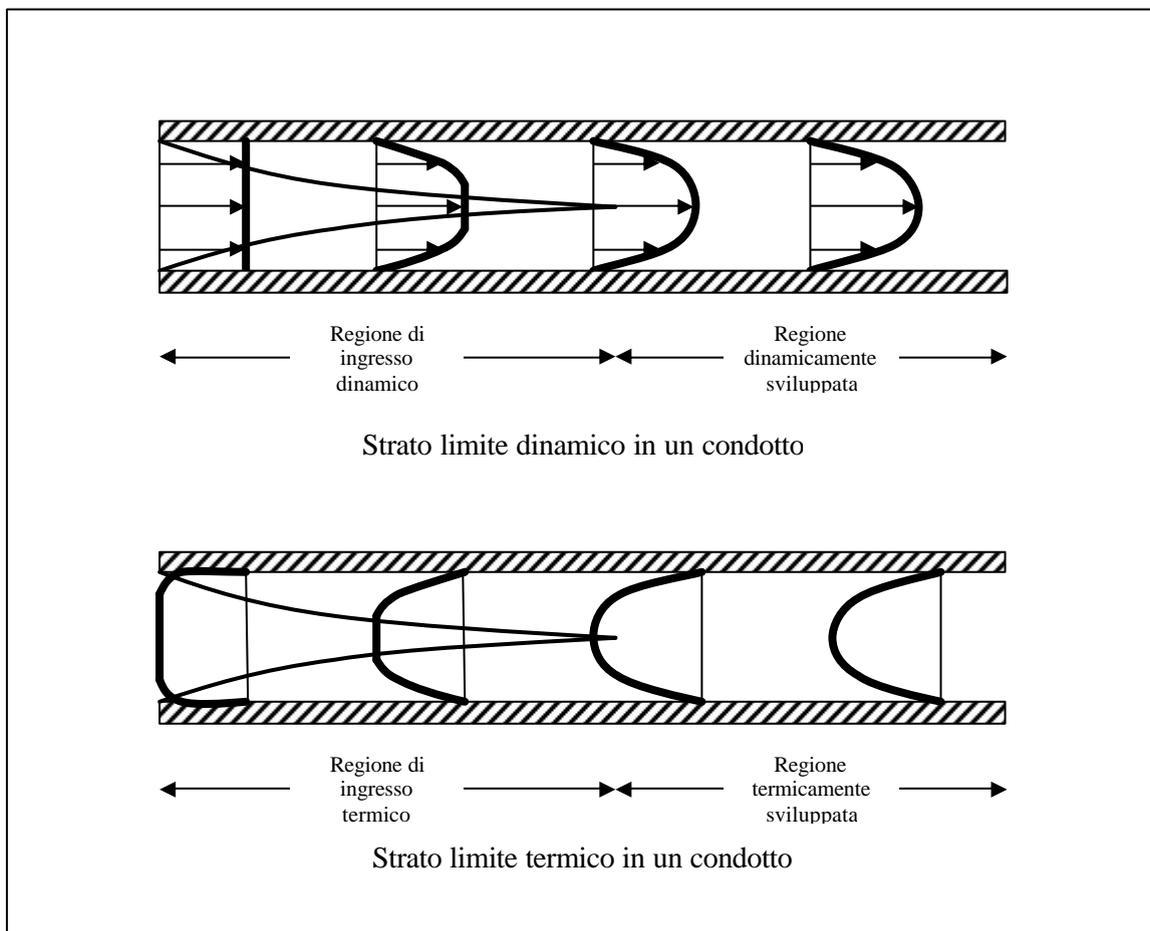
Pertanto il flusso è laminare.

1.3 Cenni sul concetto di strato limite

Per definire il significato di flusso dinamicamente e termicamente sviluppato si accenna brevemente al concetto di strato limite. Da un punto di vista fisico la zona di strato limite dinamico viene introdotta al fine di recuperare l'ipotesi di aderenza della lamina di fluido adiacente alla parete di un corpo solido. Si distinguono una zona interna in cui il profilo di velocità sarà fortemente deformato, ovvero il gradiente di velocità è elevato e con esso gli sforzi tangenziali tra i filetti fluidi, ed una zona esterna distante dalla parete in cui il fluido non risente della presenza del corpo solido ed assume la velocità indisturbata detta asintotica. Tale definizione scaturisce dal fatto che in base al concetto di strato limite il fluido della zona interna recupera la velocità indisturbata solo all'infinito; lo strato limite dinamico può dunque anche essere definito, convenzionalmente, come lo strato di fluido all'interno del quale la velocità varia da zero fino al 99% della velocità della corrente fluida indisturbata.



Se vi è una differenza di temperatura tra la corrente fluida e la superficie della parete si sviluppa uno strato limite termico analogamente allo strato limite di velocità. Le particelle che vengono a contatto con il corpo solido si portano in equilibrio con la temperatura della superficie. Queste particelle a loro volta scambiano energia con quelle degli strati fluidi adiacenti e si sviluppa così il gradiente di temperatura nel fluido. La regione in cui è presente un gradiente di temperatura è denominata strato limite termico il quale può anche essere definito come lo strato di fluido all'interno del quale la temperatura varia dal valore “di parete” fino al 99% del valore di temperatura “ambiente”.



Ci si aspetta dunque che l'altezza di strato limite cresca nella direzione del moto. Particolarizzando tali concetti per un moto all'interno di un condotto si può immediatamente notare che l'altezza di strato limite non può crescere all'infinito, ma ha un limite superiore dato dal raggio del condotto. Sarà dunque

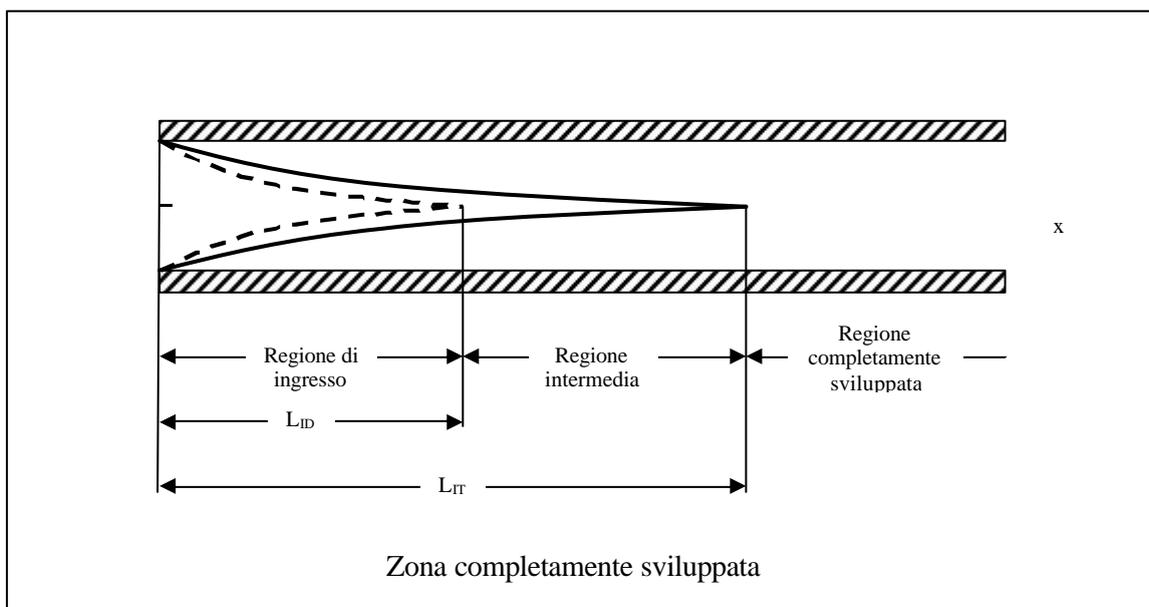
definita una zona di ingresso dinamico di lunghezza L_{ID} , caratterizzata da uno strato limite crescente, e una zona dinamicamente sviluppata in cui l'altezza suddetta ha raggiunto il suo limite superiore. Analogamente si può definire una zona termica di imbocco di lunghezza L_{IT} e una zona termicamente sviluppata.

1.4 Calcolo del numero di Prandtl

A questo punto rimane da considerare quali tra le due zone di imbocco, quella dinamica e quella termica, sia più lunga. Già con un'analisi di scala si può correlare tale aspetto con il valore del numero di Prandtl; infatti per $Pr > 1$ si ha $L_{IT} > L_{ID}$, viceversa per $Pr < 1$. Tale parametro dimensionale dipende unicamente dalle proprietà del fluido, pertanto può essere facilmente calcolato:

$$Pr = \frac{n}{a} = \frac{n \cdot r \cdot c}{k} = \frac{9.94 \cdot 10^{-7} \cdot 998.1 \cdot 4182.5}{0.6} = 6.9 > 1$$

Quindi, essendo $L_{IT} > L_{ID}$, si definisce come zona completamente sviluppata quella porzione di condotto avente $X > L_{IT}$, con X ascissa la cui origine è presa nella sezione di imbocco.



Inoltre da analisi più accurate si ottengono risultati che permettono di calcolare la lunghezza delle due zone di imbocco:

$$L_{ID} = 0.05 \cdot D \cdot Re_D$$

$$L_{IT} = 0.03 \div 0.04 \cdot D \cdot Re_D \cdot Pr$$

La scelta del coefficiente nel calcolo della L_{IT} dipende dalla condizione al contorno, 0.03 se si impone la temperatura alla parete, 0.04 se si impone il flusso termico, quindi trovandosi nel secondo caso si ha:

$$L_{ID} = 0.05 \cdot 0.02 \cdot 604 = 0.6 \text{ m}$$

$$L_{IT} = 0.04 \cdot 0.02 \cdot 604 \cdot 6.9 = 3.3 \text{ m}$$

E' opportuno precisare che la definizione di flusso completamente sviluppato, zona in cui il profilo di velocità non varierà più con la distanza dall'imbocco, ha senso sotto l'ipotesi di flusso isoterma. In caso contrario la temperatura varierà da punto a punto e in particolare dalla distanza dall'imbocco. Ma anche tutte le proprietà fisiche del fluido, dipendendo dalla temperatura, varieranno. Non si può quindi ottenere rigorosamente un profilo completamente sviluppato finché c'è scambio termico. Quando tuttavia le differenze di temperatura in gioco sono piccole è ragionevole operare sotto tale ipotesi, previa verifica dei risultati ottenuti.

1.5 Determinazione del profilo di temperatura adimensionale e calcolo del numero di Nusselt

L'obiettivo del seguente studio è quello di caratterizzare il profilo di temperatura nella zona completamente sviluppata. E' facile intuire che, differentemente dal profilo di velocità il quale in tale regione è funzione della sola coordinata radiale, fintantoché vi è scambio termico il profilo di temperatura dipende sia dalla coordinata radiale che da quella assiale. A tal fine viene in aiuto l'equazione dell'energia:

$$rc(UT_x + VT_r) = k[(RT_r)_R / R + T_{xx}]$$

questa può essere risolta rispetto l'incognita $T=T(X,R)$ una volta noto il campo di velocità:

$$U(R) = 2U_i \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2}\right) \quad ; \quad V(X, R) = 0$$

Tale soluzione, detta di Poiseuille, si ottiene risolvendo le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche semplificate nell'ipotesi di flusso sviluppato dinamicamente; si osservi come il profilo di velocità sia parabolico ed indipendente dalla coordinata assiale. Ponendo $x=X/X_{rif}$, $r=R/R_0$, $X_{rif}=DR_e D Pr/4$, $u=U/U_i$, $v=V/V_{rif}$, $t=(T-T_{rif})/T_{rif}$ si ottengono le relazioni adimensionalizzate:

$$u(r)t_x = (rt_r)_r / r$$

$$u(r) = 2(1 - r^2) \quad ; \quad v = 0$$

Si osservi come l'adimensionalizzazione porta a trascurare il termine di conduzione assiale nell'equazione dell'energia ed il bilancio si riduce all'uguaglianza tra il termine convettivo assiale e quello di conduzione radiale.

L'obiettivo ora è di trovare la soluzione $t=t(x,r)$. Tuttavia si può spostare il problema al calcolo di una opportuna temperatura adimensionale $J=J(r)$ funzione del solo raggio, la cui esistenza è connessa alla costanza del numero di Nusselt, ovvero il corrispettivo adimensionale del coefficiente h di scambio convettivo. Questo è definito come:

$$Nu = \frac{\dot{q}_{convettivo}}{\dot{q}_{conduttivo}}$$

Dall'equazione dell'energia adimensionalizzata si evince che il flusso conduttivo è paragonabile a quello convettivo, quindi si può assumere $Nu=hD/k \sim 1$, ovvero il Nusselt è costante nella zona completamente sviluppata ed ha ordine di grandezza unitario, pertanto anche il corrispettivo dimensionale sarà costante. Si può definire h come:

$$h = \frac{k \left. \frac{\partial T}{\partial R} \right|_w}{(T_w - T_b)}$$

dove T_w è la temperatura di parete e T_b è la temperatura di mescolamento adiabatico o “bulk temperature” definita tramite un bilancio di energia convetta attraverso la generica sezione:

$$E = \dot{m} c T_b = \mathbf{r} U \mathbf{p} R_0^2 c T_b$$

$$E = \int_A dE = \int_A c T d\dot{m} = \int_0^{R_0} 2 \mathbf{p} R r U c T dR$$

quindi:

$$T_b = \int_0^{R_0} 2 \frac{R}{R_0} \frac{U}{U_i} T d \frac{R}{R_0} = 2 \int_0^1 r u T dr$$

La temperatura di mescolamento adiabatico si determina per via sperimentale mescolando adiabaticamente il fluido che passa attraverso la sezione generica e misurandone la temperatura risultante finale. Adimensionalizzando la definizione di h si ottiene:

$$Nu = -2 \frac{\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_w}{(t_b - t_w)} = -2 \frac{\left. \frac{\partial}{\partial r} \frac{t(x, r) - t_w(x)}{t_b(x) - t_w(x)} \right|_w}$$

Essendo il primo membro costante lo dovrà essere anche il secondo, quindi si può definire:

$$\mathbf{J}(r) = \frac{t(x, r) - t_w(x)}{t_b(x) - t_w(x)}$$

da cui si ottiene:

$$t(x, r) = \mathbf{J}(r)[t_b(x) - t_w(x)] + t_w(x)$$

$$Nu = -2 \left. \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial r} \right|_w$$

Quanto detto finora è valido indipendentemente dalla condizione al contorno. Dalla costanza del coefficiente di convezione ed imponendo la condizione di flusso termico costante alla parete si ottiene dalla legge di Newton che:

$$T_w(x) - T_b(x) = \frac{\dot{q}}{h} \Rightarrow t_w(x) - t_b(x) = \text{cost}$$

Da cui:

$$\frac{\partial t_w}{\partial x} = \frac{\partial t_b}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \mathbf{J}(r) \left[\frac{\partial t_b}{\partial x} - \frac{\partial t_w}{\partial x} \right] + \frac{\partial t_w}{\partial x} = \frac{\partial t_w}{\partial x}$$

Ovvero

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t_b}{\partial x}$$

Da un bilancio di energia alla generica sezione si ottiene:

$$\dot{q} P dX = \dot{m} c T_b \Big|_{x+dX} - \dot{m} c T_b \Big|_x = \dot{m} c \frac{\partial T_b}{\partial X} dX$$

Da cui:

$$\frac{\partial T_b}{\partial X} = \frac{\dot{q} P}{\dot{m} c} = \frac{4 \dot{q}}{ka U_i D}$$

Adimensionalizzando ponendo $X_{rif} = U_i D^2 / (4a)$ e $\Delta T_{rif} = \dot{q} D / k$ si ottiene:

$$\frac{\partial t_b}{\partial x} = 1$$

Quindi il risultato importante è che

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 1$$

Cioè il profilo di temperatura trasla lungo il condotto, ovvero a fronte di uno scambio termico costante la temperatura media aumenta (diminuisce) nel caso di energia termica entrante (uscente), pur mantenendosi invariata la forma del profilo.

Ora non resta che scrivere l'equazione dell'energia in termini di $\mathbf{J}(r)$:

$$ru = (rt_r)_r = \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{t - t_w}{t_b - t_w} \right)_r (t_b - t_w) = (r\mathbf{J}')_r \left(-\frac{\dot{q}}{h} \frac{1}{\Delta T_{rif}} \right) = (r\mathbf{J}')_r \left(-\frac{\dot{q}}{h} \frac{k}{\dot{q} D} \right) = (r\mathbf{J}')_r \left(-\frac{1}{Nu} \right)$$

Sostituendo il campo di moto di Poiseuille e corredando tale equazione delle opportune condizioni al contorno, $T(R_0) = T_w$ e la condizione di simmetria rispetto l'asse del condotto, si definisce il seguente problema differenziale:

$$\begin{cases} -2Nu(r-r^3) = (rJ)_r \\ J(1) = 0 \\ J'(0) = 0 \end{cases}$$

il quale può essere integrato per via analitica:

$$J = -2Nu \left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4} \right) + C_1$$

Dalla condizione al contorno di simmetria si ottiene $C_1 = 0$. Continuando ad integrare:

$$J = -2Nu \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16} \right) + C_2$$

Dalla condizione al contorno di simmetria rispetto l'asse si ottiene $C_2 = \frac{3}{8} Nu$,

quindi:

$$J = Nu \left(\frac{3}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right)$$

Il Nusselt incognito si ricava dalla definizione di T_b particolarizzata per il flusso di Poiseuille e riportata in termini di $J(r)$:

$$T_b = \int_0^1 2ruTdr = 4 \int_0^1 (r-r^3) J dr$$

Sottraendo ambo i membri T_w e tenendo conto del bilancio di massa in termini adimensionali si ottiene:

$$T_b - T_w = 4 \int_0^1 (r-r^3) J dr - T_w = 4 \int_0^1 (r-r^3) J dr - T_w \cdot 4 \int_0^1 (r-r^3) dr = 4 \int_0^1 (r-r^3) (T - T_w) dr$$

Dividendo quindi per $T_b - T_w$:

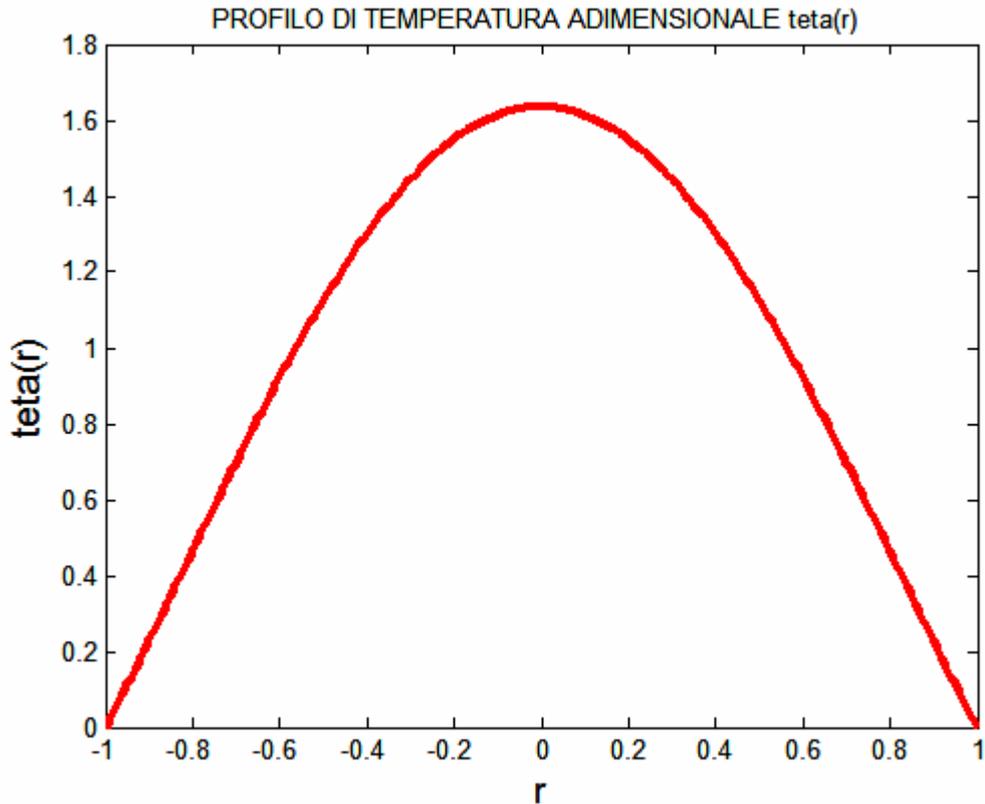
$$1 = 4 \int_0^1 (r-r^3) J(r) dr$$

Sostituendo $J(r)$:

$$1 = 4 \int_0^1 (r-r^3) \left[Nu \left(\frac{3}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right) \right] dr \quad \Rightarrow \quad Nu = \frac{48}{11}$$

Quindi il profilo di temperatura adimensionale $J(r)$ è:

$$J(r) = \frac{48}{11} \left(\frac{3}{8} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right)$$



1.6 Determinazione del profilo di temperatura dimensionale

Senza passare per il profilo adimensionale $t(x,r)$, si può direttamente determinare il profilo dimensionale $T(X,R)$. Infatti dalla definizione di $J(r)$:

$$J(r) = \frac{t(x,r) - t_w(x)}{t_b(x) - t_w(x)} = \frac{\frac{T(X,R) - T_{rif}}{\Delta T_{rif}} - \frac{T_w(X) - T_{rif}}{\Delta T_{rif}}}{\frac{T_b(X) - T_{rif}}{\Delta T_{rif}} - \frac{T_w(X) - T_{rif}}{\Delta T_{rif}}} = \frac{T(X,R) - T_w}{T_b(X,R) - T_w}$$

da cui:

$$T(X,R) = Nu(T_b(X) - T_w(X)) \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \frac{R^2}{R_0^2} + \frac{1}{8} \frac{R^4}{R_0^4} \right) + T_w(X) \quad \text{per } X > L_{IT}$$

Si noti come questa valga solo nella zona completamente sviluppata, ovvero per valori di X maggiori di L_{IT} . Si è già visto che $T_b(X)$ e $T_w(X)$ hanno un andamento lineare con pendenza nota, quindi:

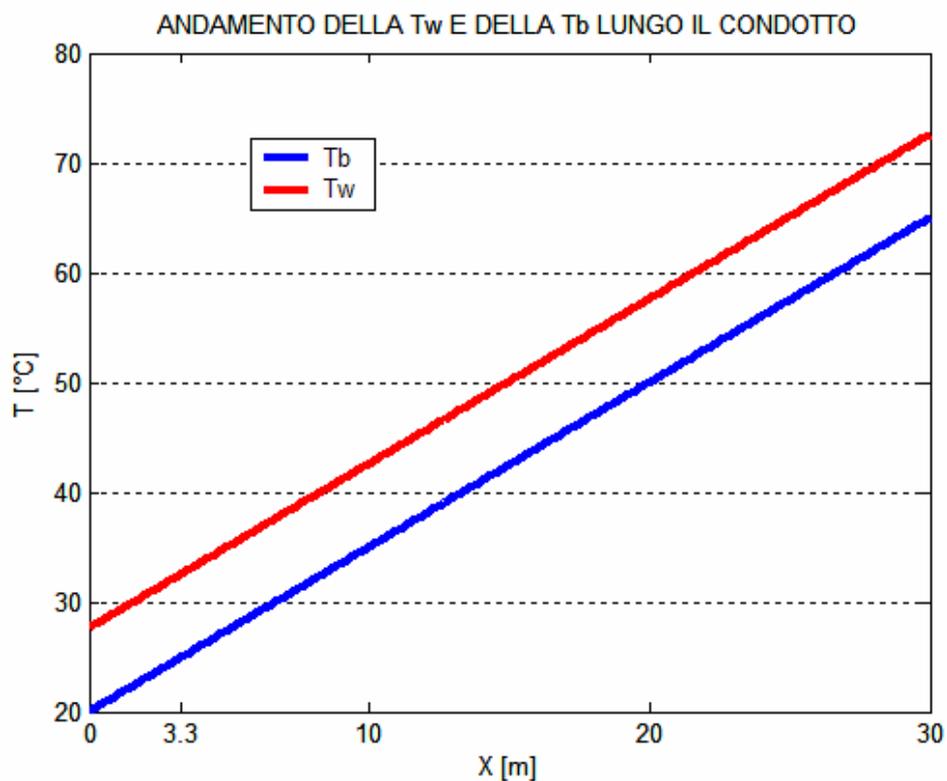
$$T_b(X) = \frac{\dot{q}P}{\dot{m}c} X + C_1 \quad ; \quad T_w(X) = \frac{\dot{q}P}{\dot{m}c} X + C_2$$

Essendo $T_b(X=0) = 20^\circ\text{C}$ (si noti che tali andamenti valgono anche nella zona non sviluppata in quanto sono stati ricavati da un bilancio di energia) si ottiene $C_1=20$. Inoltre dalla legge di Newton:

$$T_w(X) - T_b(X) = \frac{\dot{q}}{h} = \frac{\dot{q}}{\frac{kNu}{D}} = \frac{0.1 \cdot 10^4}{48 \cdot 0.6} = 7.6^\circ\text{C}$$

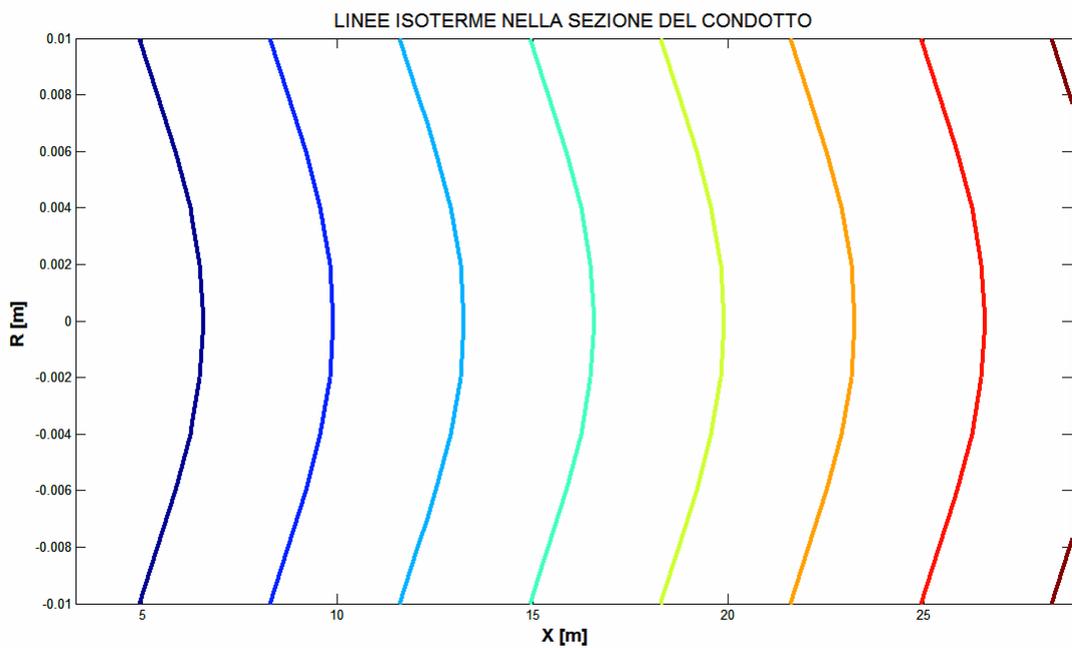
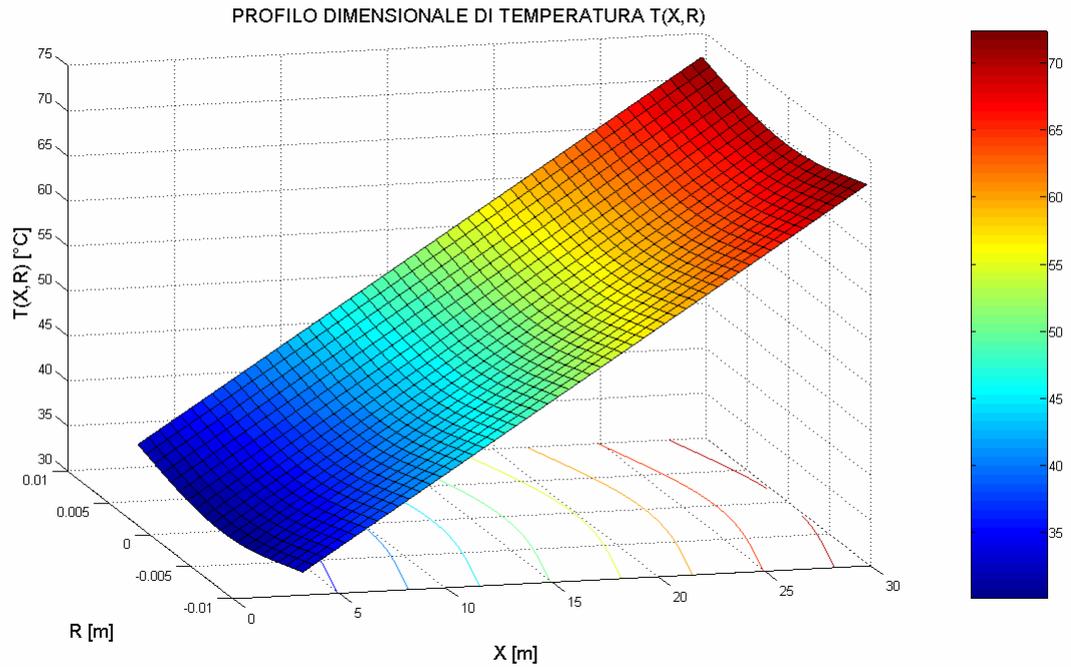
Si osservi che $T_w > T_b$ come previsto in caso di flusso termico entrante. Essendo $T_w(X=0) = 27.6^\circ\text{C}$ si ottiene $C_2=27.6$, quindi:

$$T_b(X) = 1.5X + 20 \quad ; \quad T_w(X) = 1.5X + 27.6$$



Il profilo dimensionale $T(X,R)$ nella zona completamente sviluppata è:

$$T(X,R) = \frac{48}{11} (-1.5) \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \frac{R^2}{0.01^2} + \frac{1}{8} \frac{R^4}{0.01^4} \right) + 1.5X + 27.6 \quad \text{per } X > 3.3 \text{ m}$$



1.7 Verifica dell'ipotesi di flusso isoterma

Stante l'ipotesi iniziale di flusso isoterma, è opportuno reiterare il procedimento considerando le proprietà del fluido relativamente alla “bulk temperature” media presente all'interno del condotto. Ci si aspetta che dopo alcune iterazioni la

temperatura media converga ad un preciso valore. Dato l'andamento lineare di T_b la media sarà proprio quella aritmetica, quindi considerando che il condotto sia lungo $30m$:

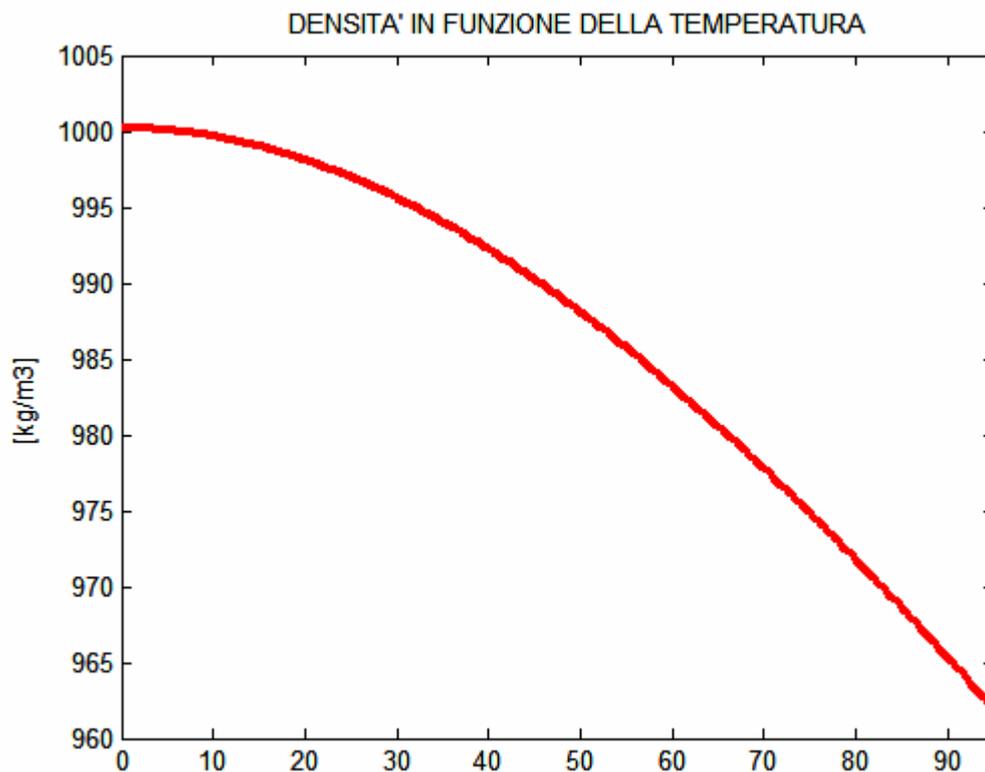
$$\overline{T_b} = \frac{T_b(X=0) + T_b(X=30)}{2} = \frac{20 + 65}{2} = 42.5^\circ C$$

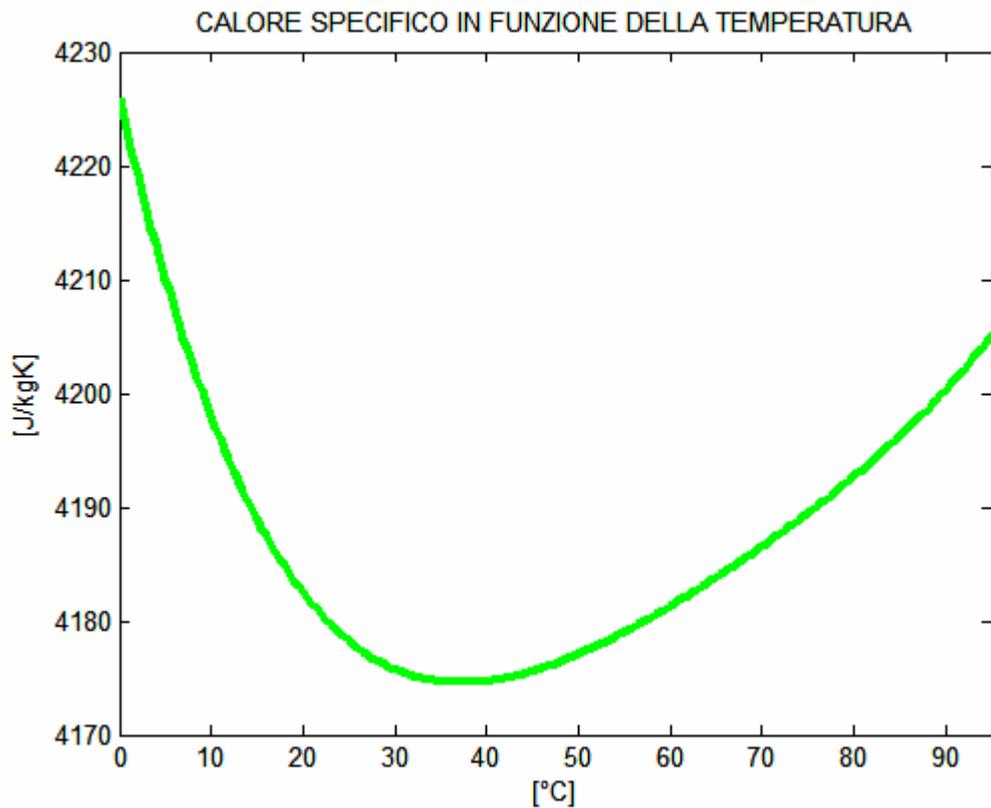
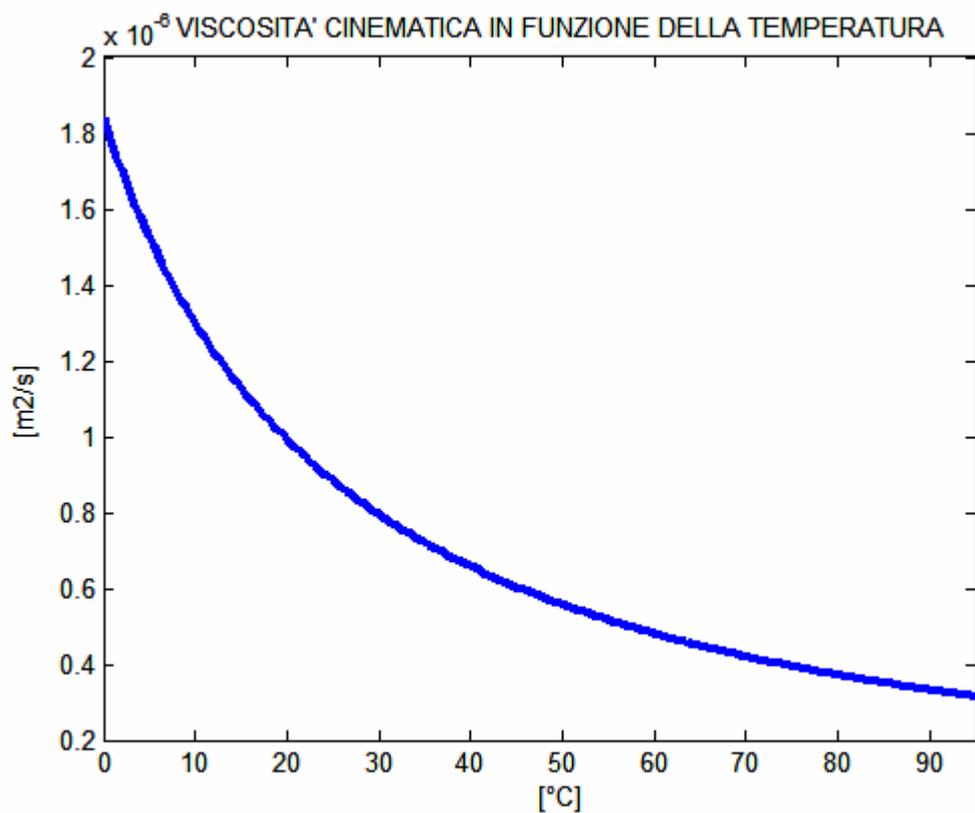
Al fine di calcolare le proprietà del fluido a tale temperatura si può utilizzare le seguenti espressioni polinomiali (con T in °C):

$$\rho(T) = 1000.2 + 0.003689T - 0.005597T^2 + 0.00001393T^3 [kg/m^3]$$

$$\nu(T) = 10^{-6} / (0.544 + 0.0219T + 0.00006098T^2) [m^2/s]$$

$$c(T) = 0.000003T^4 - 0.0008T^3 + 0.084T^2 - 3.5516T + 4225.9 [J/kgK]$$





Densità	ρ	991.3 kg/m ³
Viscosità cinematica	ν	6.31 10 ⁻⁷ m ² /s
Calore specifico	c	4175.1 J/kg K
Conducibilità termica	k	0.6 W/m K

I risultati numerici saranno:

$$Re_D = \frac{U_i D}{\nu} = \frac{0.03 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{6.31 \cdot 10^{-7}} = 950 < 2300 \Rightarrow \text{moto laminare}$$

$$Pr = \frac{\rho \cdot \nu \cdot c}{k} = \frac{6.31 \cdot 10^{-7} \cdot 991.3 \cdot 4175.1}{0.6} = 4.4 > 1 \Rightarrow L_{IT} > L_{ID}$$

$$L_{ID} = 0.05 \cdot D \cdot Re_D = 0.05 \cdot 0.02 \cdot 950 = 0.9 \text{ m}$$

$$L_{IT} = 0.03 \div 0.04 \cdot D \cdot Re_D \cdot Pr = 0.04 \cdot 0.02 \cdot 950 \cdot 4.3 = 3.3 \text{ m}$$

$$\frac{\dot{q} P}{\dot{m} c} = \frac{0.1 \cdot 10^4 \cdot p \cdot 0.02}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 4175.1} = 1.5$$

$$T_b(X) = 1.5X + 20$$

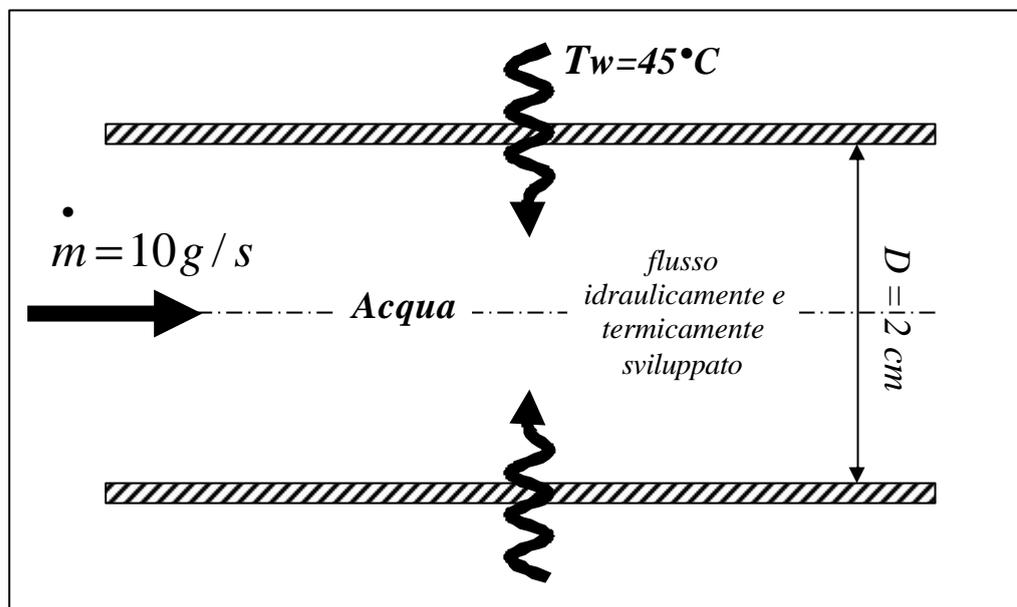
$$T_w(X) = 1.5X + 27.6$$

$$\bar{T}_b = \frac{T_b(X=0) + T_b(X=30)}{2} = \frac{20 + 65}{2} = 42.5^\circ\text{C}$$

Si può notare che già alla prima iterazione il risultato converge, quindi l'ipotesi di flusso isoterma risulta verificata.

2

Temperatura costante alla parete



2.1 Determinazione del profilo di temperatura adimensionale e calcolo del numero di Nusselt (metodo delle approssimazioni successive)

Ritenendo valide le stesse considerazioni fatte per il problema a flusso imposto, in particolar modo l'ipotesi di flusso isoterma, si può affermare l'indipendenza del campo di velocità da quello di temperatura, per cui la lunghezza d'ingresso dinamico L_{ID} è la stessa del caso precedente (il calcolo è stato fatto tenendo conto delle proprietà dell'acqua a 20°C):

$$L_{ID} = 0.05 \cdot D \cdot Re_D = 0.05 \cdot 0.02 \cdot 604 = 0.6 \text{ m}$$

Invece non si può dire altrettanto per la lunghezza d'ingresso termico L_{IT} che risente delle condizioni al contorno imposte, per cui da un'analisi numerica si ottiene:

$$L_{IT} = 0.03 \cdot D \cdot Re_D \cdot Pr = 0.03 \cdot 0.02 \cdot 604 \cdot 6.9 = 2.5 \text{ m}$$

L'obiettivo è quello di risalire al campo di temperatura adimensionale e dimensionale nella zona sviluppata sia dinamicamente che termicamente, risolvendo l'equazione dell'energia particolarizzata al problema in esame, che come si vedrà in seguito, non può essere risolta analiticamente.

Come nel caso precedente occorre individuare una opportuna adimensionalizzazione della temperatura per semplificare l'equazione di partenza; in riferimento al precedente paragrafo, si riporta solo il risultato volto al conseguimento di tale obiettivo:

$$Nu = -2 \frac{\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_w}{(t_b - t_w)} = -2 \frac{\partial T(x, r) - T_w(x)}{\partial r T_b(x) - T_w(x)} \Big|_w$$

$$J(r) = \frac{T(x, r) - T_w(x)}{T_b(x) - T_w(x)}$$

E' necessario esprimere in funzione di $J(r)$ l'equazione dell'energia:

$$u(r)t_x = (rt_r)_r / r$$

$$u(r) = 2(1 - r^2) \quad ; \quad v = 0$$

ricordando:
$$\frac{\partial T_b}{\partial X} = \frac{\dot{q} P}{\dot{m} c} = \frac{4 \dot{q}}{ka U_i D}$$

e la legge di newton: $\dot{q} = h(T_w - T_b(X))$ e ponendo la t come $t = \frac{T - T_{rif}}{\Delta T_{rif}}$ si ottiene:

$$\frac{\partial t_b}{\partial x} = -\frac{4hx_{rif}}{rcU_i D} = -Nu \quad \text{con} \quad x_{rif} = \frac{D \cdot Re_D \cdot Pr}{4}$$

Per cui integrando otteniamo la T_b e la sua adimensionalizzazione t_b funzione di x e Nu :

$$T_b(X) = T_w + (T_{bi} - T_w) \cdot e^{\left(\frac{-Nu}{X_{rif}} (X - L_{IT}) \right)} \quad \text{per } X > L_{IT}$$

$$t_b(x) = t_{bi} \cdot e^{(-Nu \cdot (x - l_{IT}))} \quad \text{per } x > l_{IT}$$

Ricordando che:

$$T(X, r) = J(r)[T_b(X) - T_w] + T_w(X) \quad \text{per } X > L_{IT}$$

$$t(x, r) = J(r)[t_b(x) - t_w(x)] + t_w(x) \quad \text{per } x > l_{IT}$$

e sostituendo quest'ultima nell'equazione dell'energia corredata delle due condizioni al contorno, ossia temperatura alla parete T_w nota e simmetria del condotto, si formula il problema in termini di $J(r)$:

$$\begin{cases} -2NuJ \cdot (r - r^3) = (rJ)', \\ J(1) = 0 \\ J'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad Nu = -2 \frac{\partial J}{\partial r} \Big|_w.$$

L'equazione ottenuta è del secondo ordine, lineare in $J(r)$ a coefficienti variabili. La presenza di $J(r)$ al primo membro non ci consente di integrarla analiticamente, per cui si presta ad essere integrata numericamente.

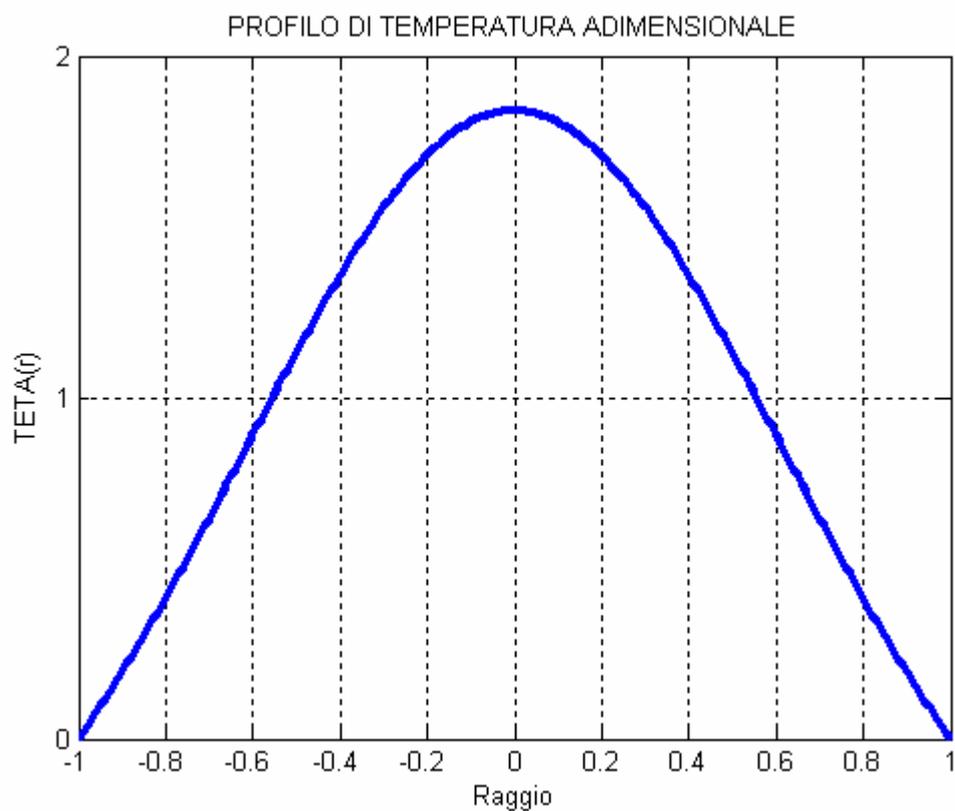
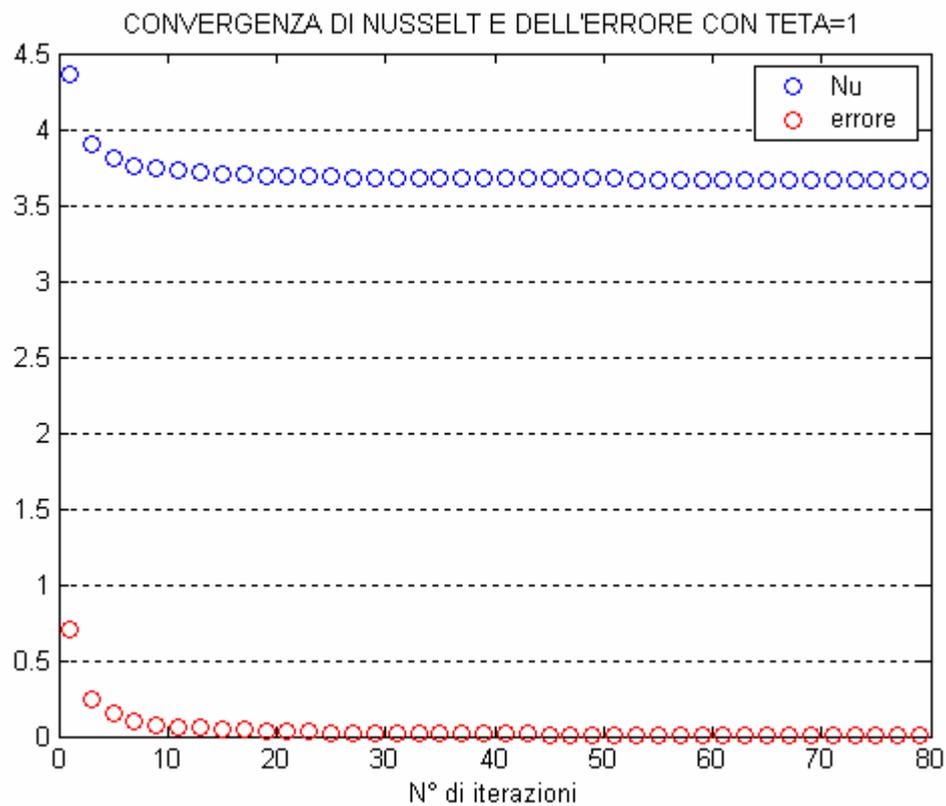
In alternativa all'integrazione numerica vi è il *metodo delle approssimazioni successive* che prevede l'assegnazione di un valore di tentativo per $J(r)$ presente al primo membro, in modo da poter essere integrata analiticamente e la sostituzione della soluzione ottenuta nella iterazione successiva e così via. Il processo termina quando il Nu si assesta ad un valore costante.

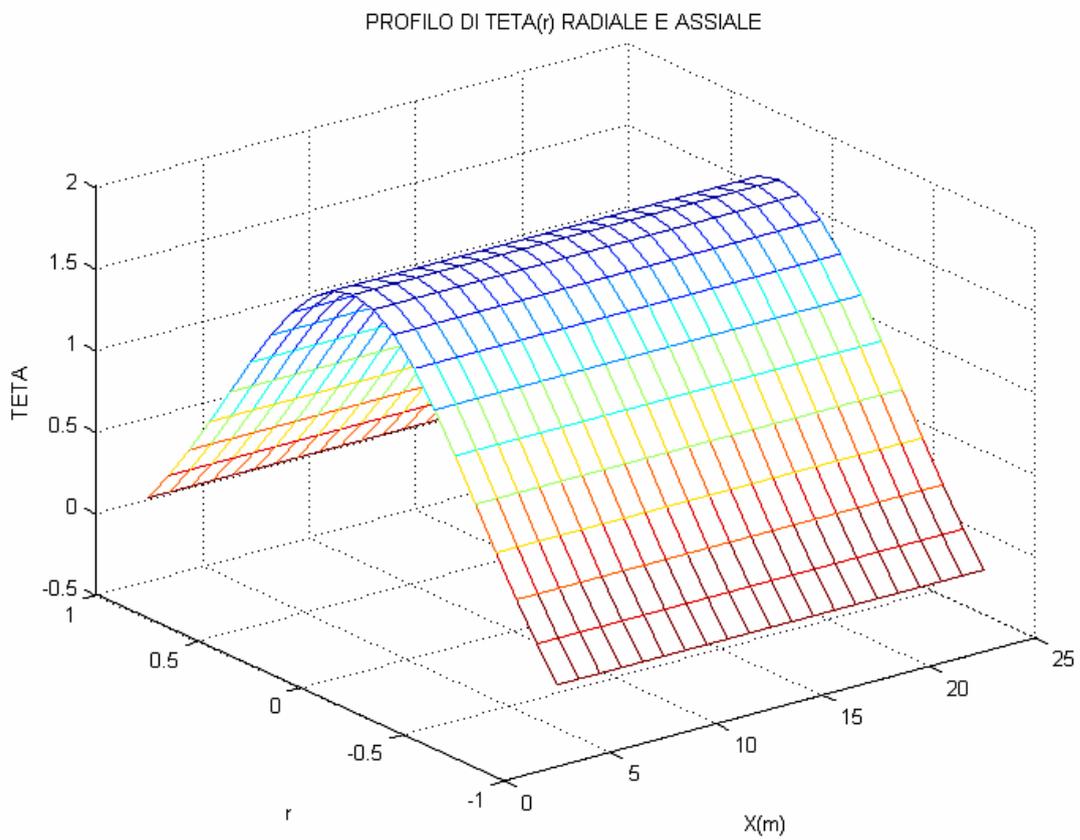
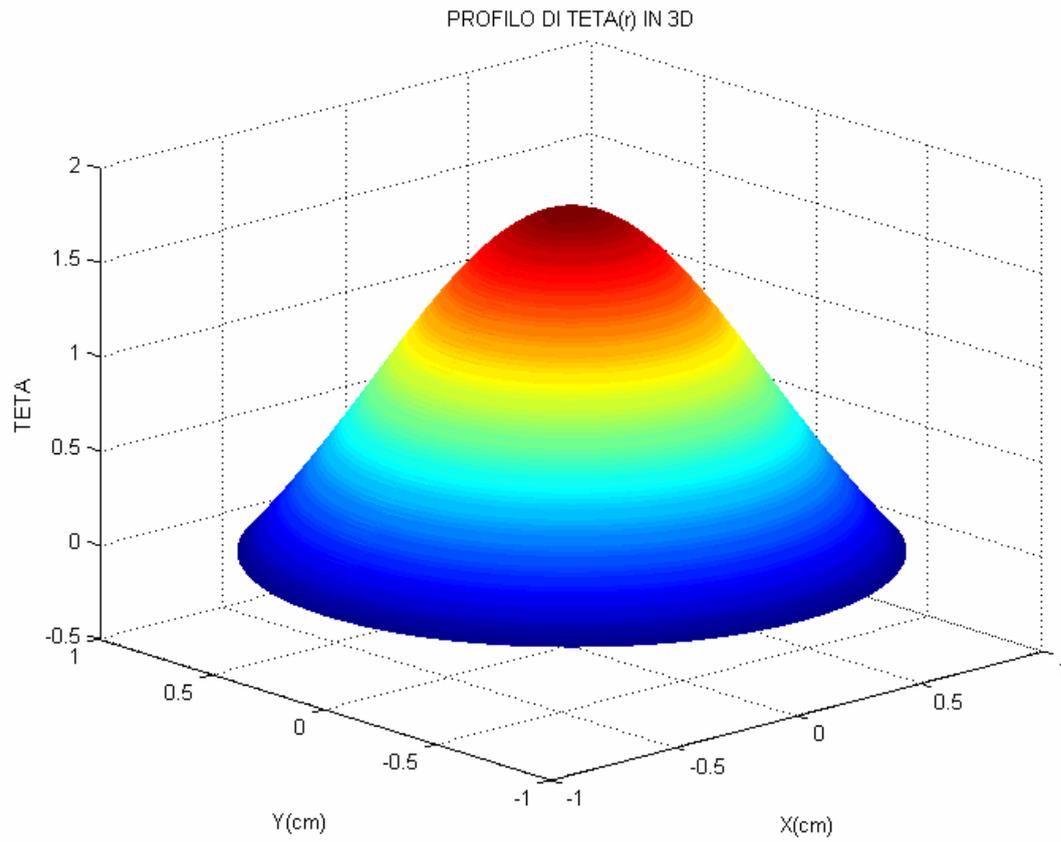
In appendice si riportano le istruzioni implementate in *Matlab*® con cui si giunge alla soluzione di $J(r)$ attraverso il metodo delle approssimazioni successive. Sempre in appendice si troverà l'analisi di convergenza del metodo numerico e la soluzione relativa a $J(r)$. Il risultato da mettere in evidenza è che il numero di Nusselt converge ad un valore pari a 3.66, coincidente a quello riscontrabile in letteratura, e che $J(r)$ assume una forma del tipo:

$$J(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} r^{2n}$$

E' evidente che i termini diventano trascurabili al crescere di n , per cui prendendo i primi cinque monomi la soluzione diventa:

$$J(r) = -3.31 \cdot r^2 + 2.34 \cdot r^4 - 1.15 \cdot r^6 + 0.4 \cdot r^8 - 0.11 \cdot r^{10} + 1.81$$





Quest'ultimo grafico risalta l'indipendenza di $J(r)$ da X .

2.2 Determinazione del profilo di temperatura dimensionale

Noto il profilo adimensionale $J(r)$ si può valutare il campo di temperatura dimensionale tramite la caratterizzazione della T_b , dipendente da Nu :

$$T_b(X) = T_w + (T_{bi} - T_w) \cdot e^{\left(-\frac{Nu}{X_{rif}}(X - L_{IT})\right)} \quad \text{per } X > L_{IT}$$

La T_{bi} si può calcolare osservando che nella zona termicamente non sviluppata il fluido non risente delle condizioni al contorno, quindi $T_{asse}(X=L_{IT})=20^\circ\text{C}$, mentre la temperatura alla parete è nota, ovvero $T_w=45^\circ\text{C}$:

$$T(X, R) = J(r)[T_b(x) - T_w] + T_w \quad \text{per } X > L_{IT};$$

$$T(X, R) = \left[-3.31 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 + 2.34 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 - 1.15 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^6 + 0.4 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^8 - 0.11 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^{10} + 1.81 \right] \cdot [(T_{bi} - T_w) \cdot e^{\left(-\frac{Nu}{X_{rif}}(X - L_{IT})\right)}] + T_w$$

per $X > 2.5\text{m}$;

$$T(2.5, 0) = (1.81) \cdot [(T_{bi} - 45) \cdot e^{\left(-\frac{366}{20.92} \cdot 0\right)}] + 45 = 20 \Rightarrow 1.81 \cdot T_{bi} - 81.45 + 45 = 20 \Rightarrow T_{bi} = \frac{56.45}{1.81} = 31.19^\circ\text{C}$$

Poiché l'equazione $\frac{\partial T_b}{\partial X} = \frac{\dot{q}P}{\dot{m}c} = \frac{4\dot{q}}{kaU_i D}$ vale anche nella zona d'imbocco è

possibile risalire al Nu_i (Nu medio all'imbocco) in tale zona attraverso la sua integrazione:

$$T_b(X) = T_w + (T_0 - T_w) \cdot e^{\left(-\frac{Nu_i \cdot X}{X_{rif}}\right)} \Rightarrow T_b(2.5) = 45 + (20 - 45) \cdot e^{\left(-\frac{Nu_i \cdot 2.5}{20.92}\right)} \Rightarrow \ln\left(-\frac{31.19 - 45}{25}\right) = -Nu_i \cdot 0.12 \Rightarrow$$

$$Nu_i = \frac{0.5935}{0.12} = 4.95, \text{ quindi:}$$

$$T_b(X) = T_w + (T_0 - T_w) \cdot e^{\left(-\frac{Nu_i \cdot X}{X_{rif}}\right)} = 45 - 25e^{-0.24X} \quad \text{per } 0 < X < L_{IT}$$

L'approssimazione sta nel fatto che il Nu all'imbocco sarà una funzione non nota di X , mentre si è ipotizzato essere costante e pari a 4.95. Tuttavia tale valore è

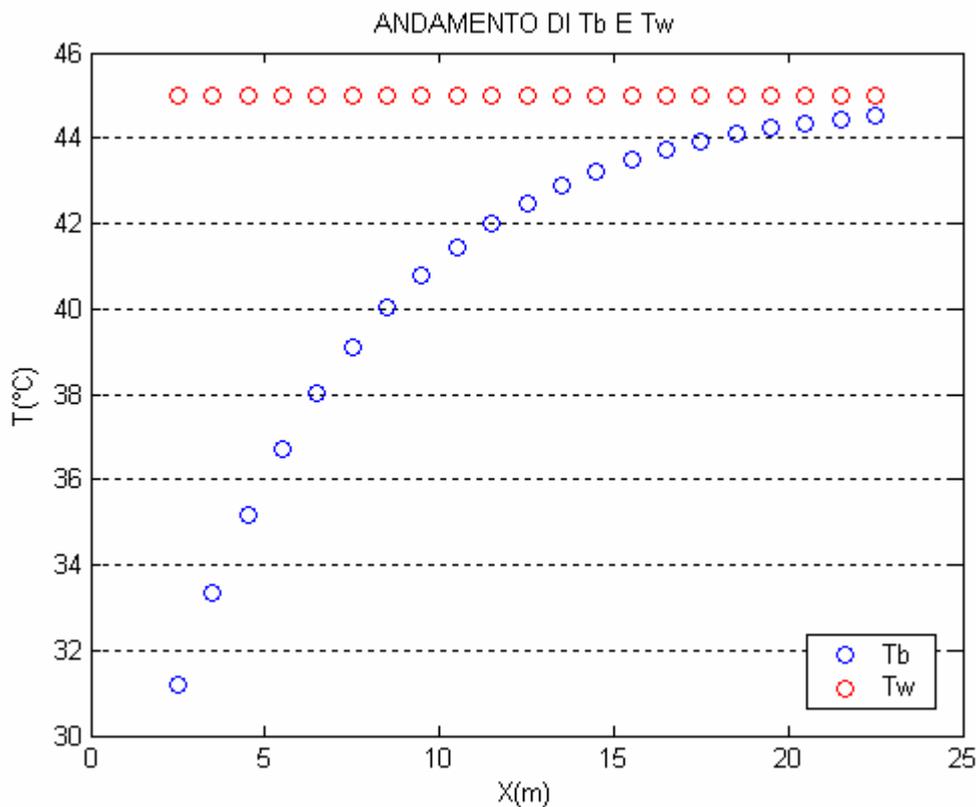
plausibile considerando che risulta essere circa pari alla media pesata tra il Nu relativo al moto turbolento e valido per $X < L_{ID}$ e il Nu relativo al moto laminare e valido per $L_{ID} < X < L_{IT}$:

$$Nu_{turbolento} = 0.0155 \cdot Re_D^{0.83} \cdot Pr^{0.5} \quad \text{con } 1 < Pr < 20$$

$$Nu_i = \frac{Nu_{turbolento} \cdot L_{ID} + Nu_{laminare} \cdot (L_{IT} - L_{ID})}{L_{IT}} = \frac{8.29 \cdot 0.6 + 3.66 \cdot 1.9}{2.5} = 4.8$$

Noto T_{bi} è possibile ora risalire alle $T_b = T_b(X)$ e $T = T(X, R)$:

$$T_b(X) = 45 + (31.19 - 45) \cdot e^{\left(-\frac{3.66}{20.92}(X-2.5)\right)} = 45 - 13.81 \cdot e^{(-0.17(X-2.5))}$$



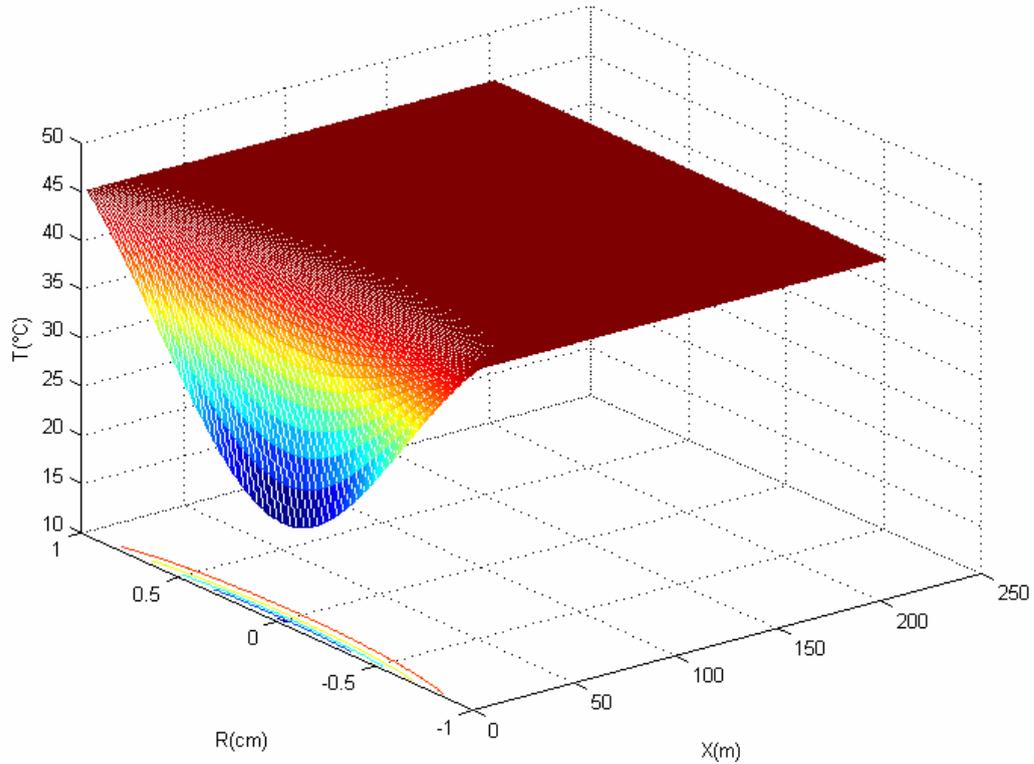
Si osserva che per $X \sim 22 \text{ m}$ si ottiene $T_b = 0.99 T_w$, quindi possiamo ritenere con buona approssimazione che da tale distanza in poi non vi sia più scambio termico tra la parete e l'acqua che circola all'interno del condotto, infatti viene meno la *driving force* del fenomeno in quanto la temperatura del fluido si è adeguata alla T_w . In appendice si riportano i valori numerici di T_b al variare di X .

Il campo di temperatura risulta essere:

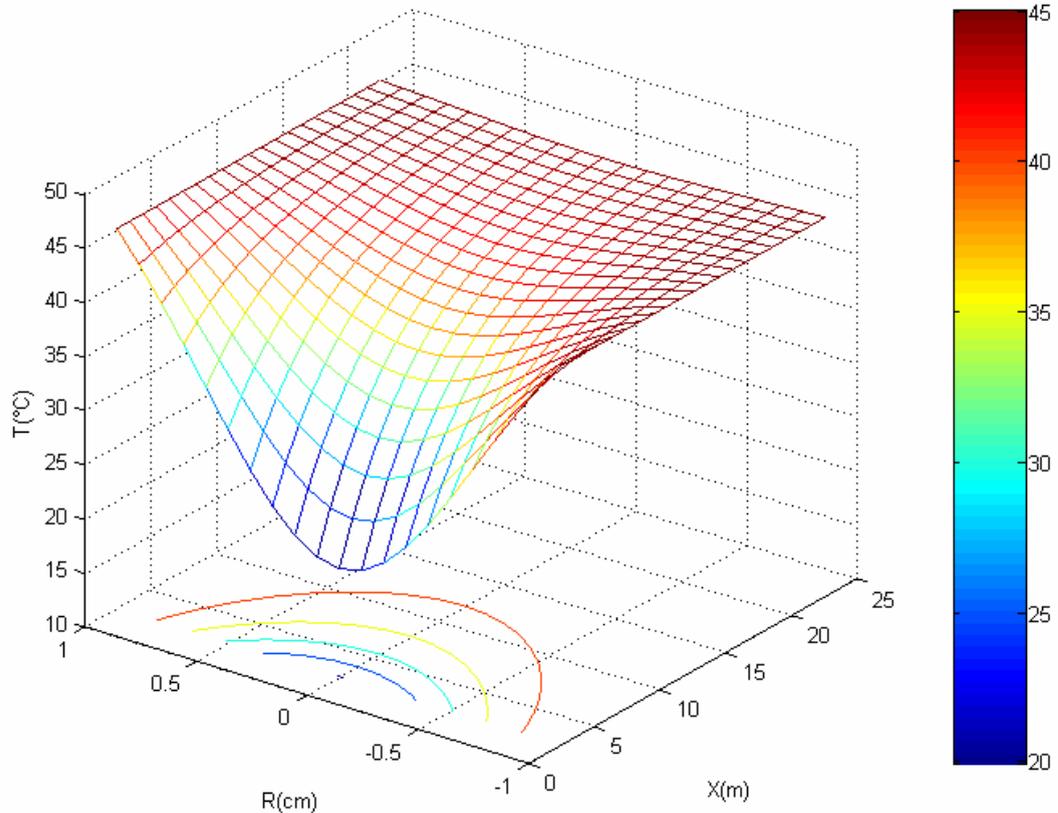
$$T(X,R) = \left(-3.31 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + 2.34 \left(\frac{R}{R_0} \right)^4 - 1.15 \left(\frac{R}{R_0} \right)^6 + 0.4 \left(\frac{R}{R_0} \right)^8 - 0.11 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{10} + 1.81 \right) \left[(1381) \cdot e^{\left(\frac{366}{2092} (X-2.5) \right)} \right] + 45$$

per $X > 2.5m$;

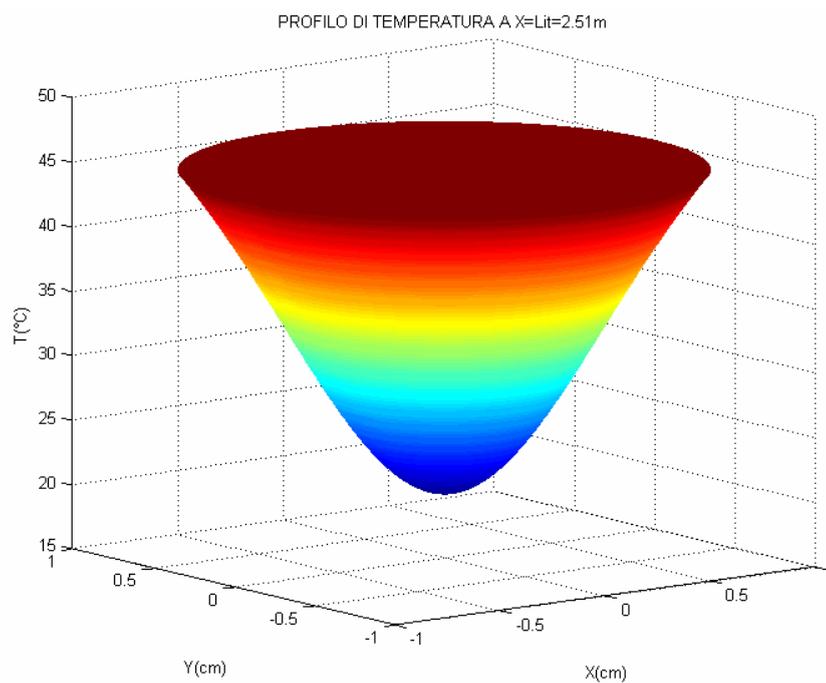
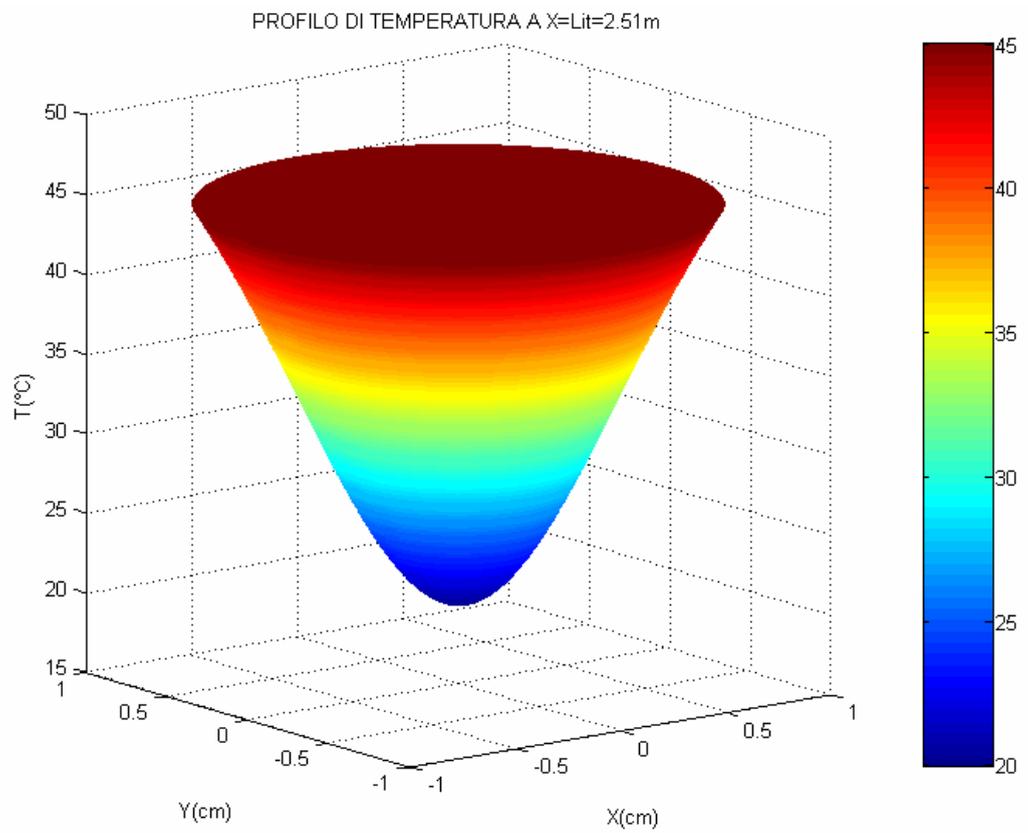
PROFILO DI TEMPERATURA RADIALE E ASSIALE

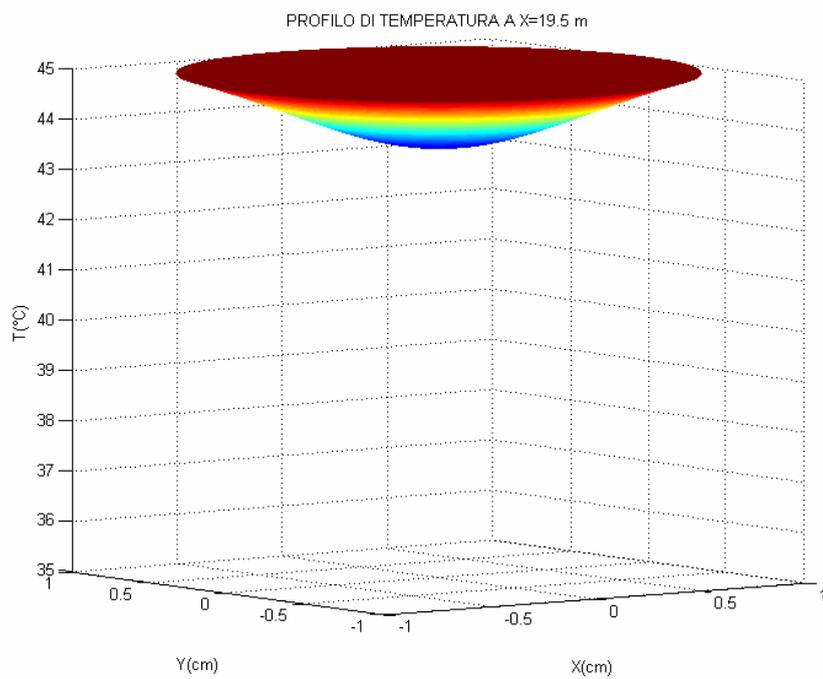
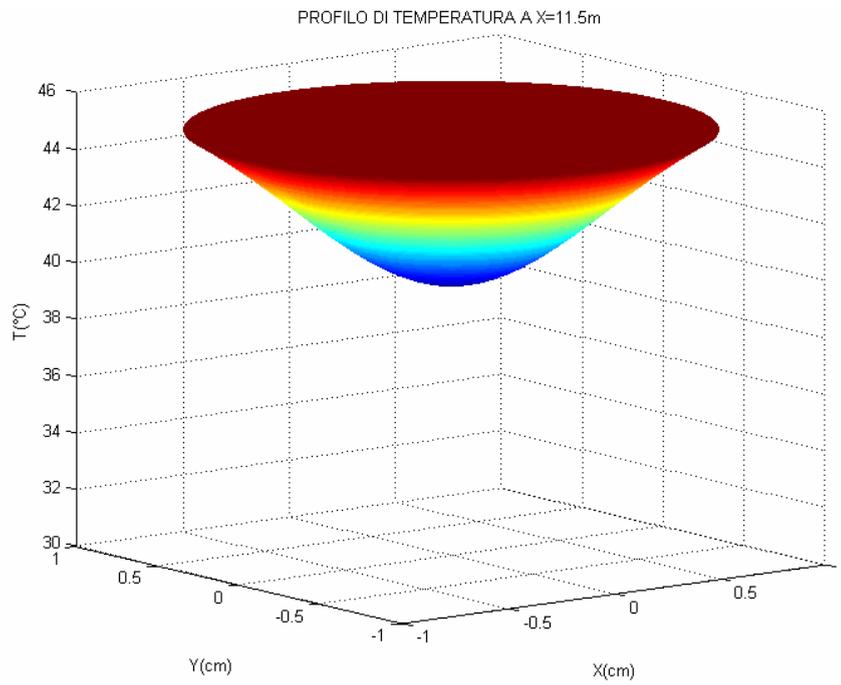


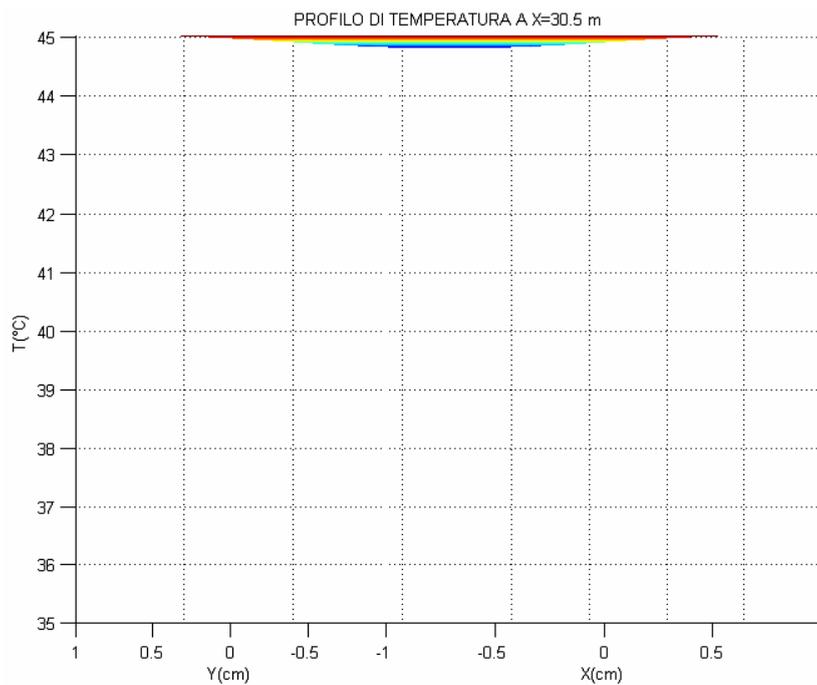
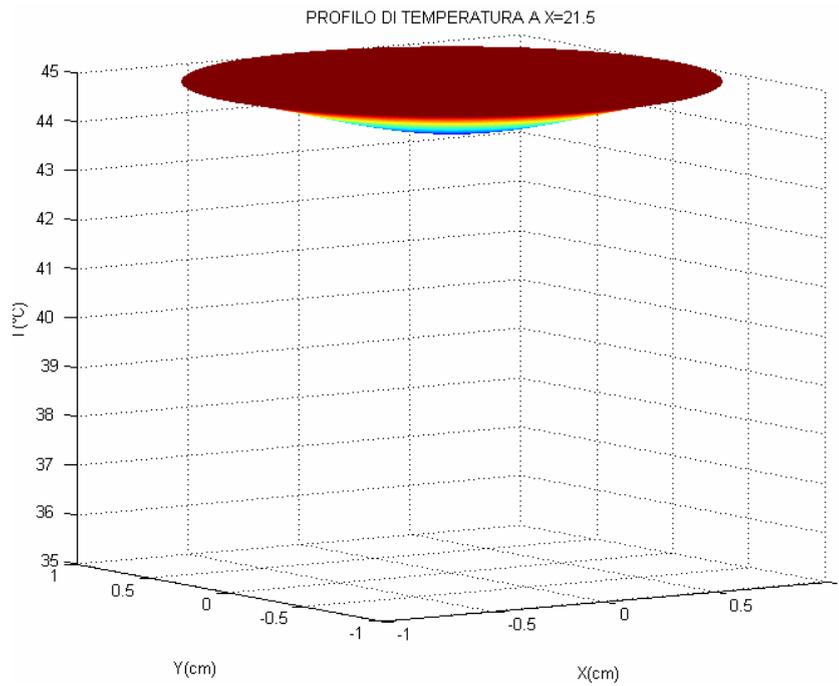
PROFILO DI TEMPERATURA RADIALE E ASSIALE



Per avere una rappresentazione più realistica dell'andamento della temperatura all'aumentare della lunghezza del condotto sono riportati i seguenti grafici:







2.3 Calcolo della potenza termica scambiata

Noto il campo di temperatura, dalla legge di Newton è possibile valutare la potenza termica scambiata:

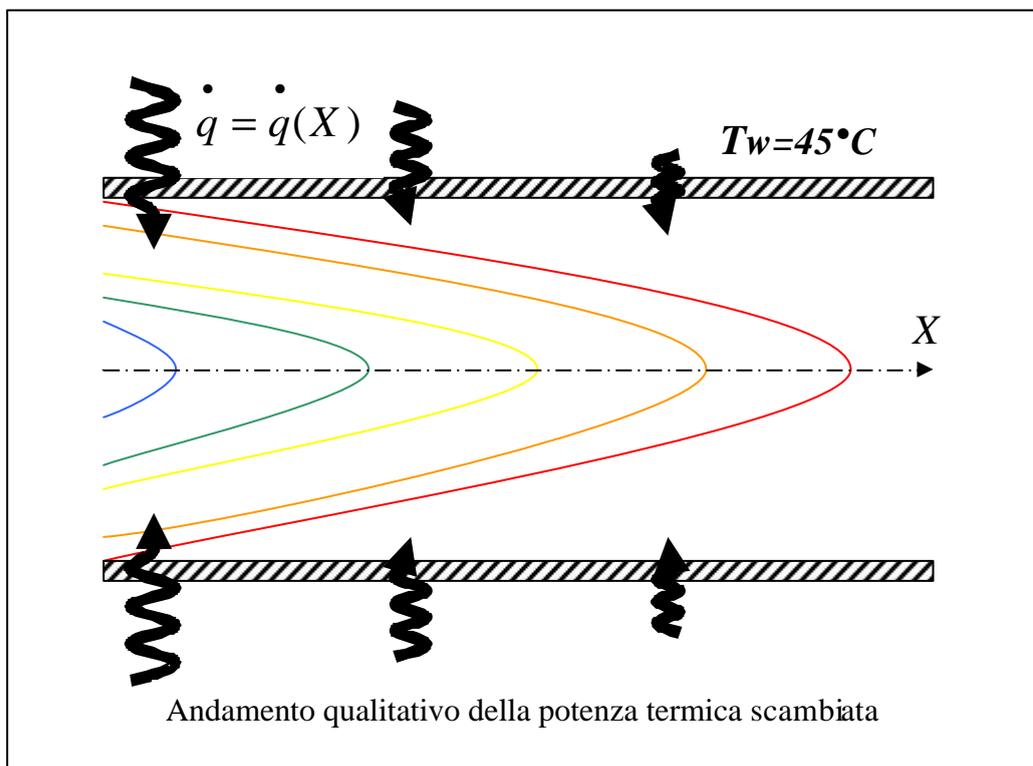
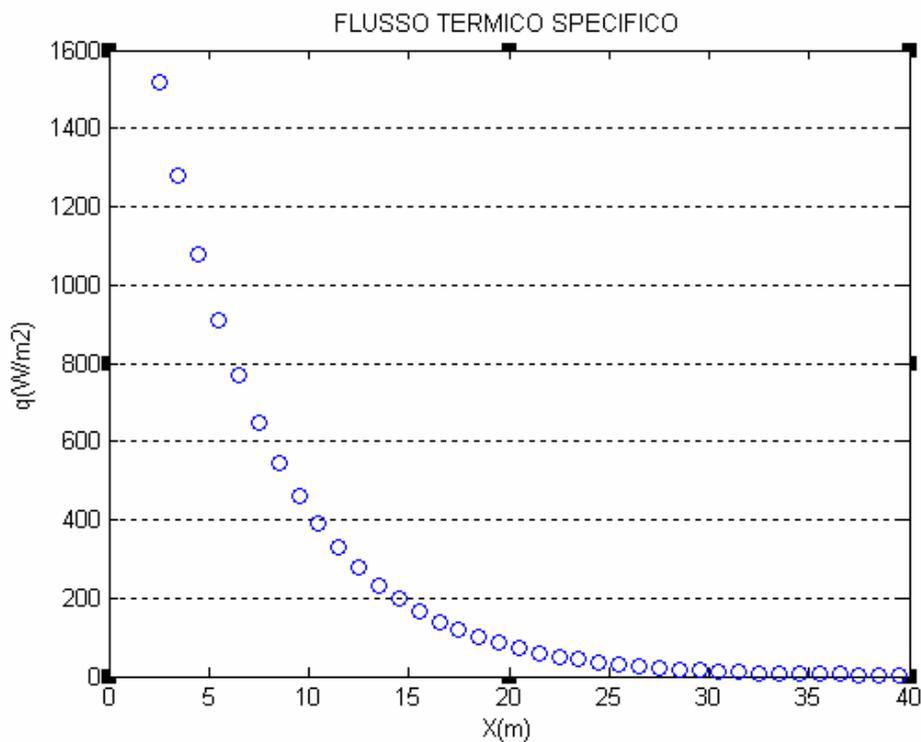
$$\dot{q} = h(T_w - T_b(X))$$

Calcolando h si ottiene:

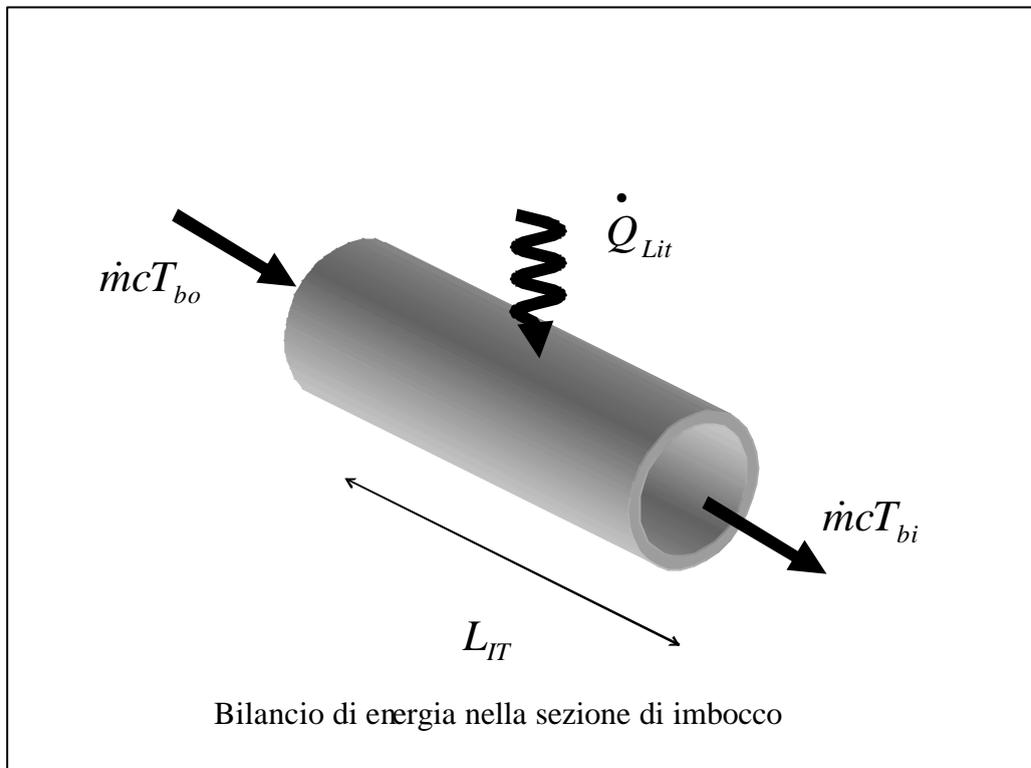
$$Nu = 3.66 = \frac{hD}{k} \Rightarrow h = \frac{3.66 \cdot k}{D} = \frac{3.66 \cdot 0.6}{0.02} = 109.8 \frac{W}{m^2 K}$$

E quindi:

$$\dot{q} = h \left(- (T_{bi} - T_w) \cdot e^{\left(-\frac{Nu}{X_{ref}} (X - L_{it}) \right)} \right) = 109.8(13.81) \cdot e^{-\frac{3.66}{20.92}(X-2.5)} = 1516.34 \cdot e^{-0.17(X-2.5)} \text{ per } X > 2.5m$$



Ora possiamo valutare la potenza termica complessiva scambiata al variare della lunghezza del condotto. Innanzi tutto si valuta il calore scambiato nella zona di imbocco tramite un bilancio di energia:



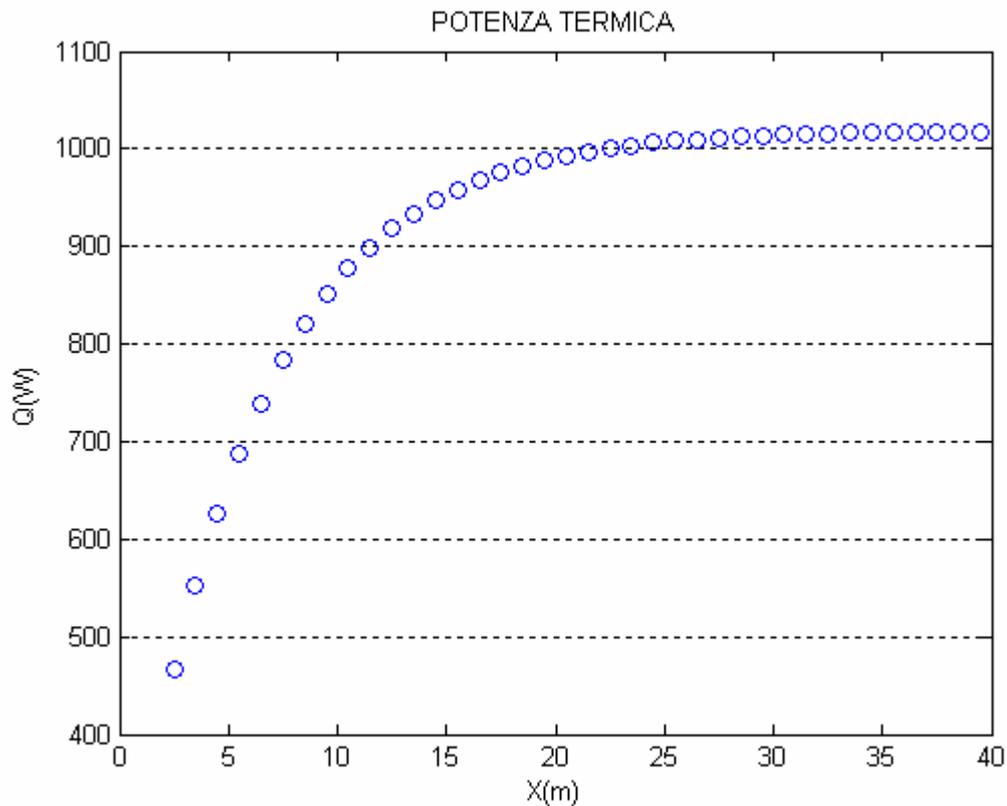
$$\dot{m}cT_{b0} + \dot{Q}_{Lit} = \dot{m}cT_{bi} \Rightarrow \dot{Q}_{Lit} = \dot{m}c(T_{bi} - T_{b0}) = 10 \cdot 4.1825 \cdot (11.19) = 468W$$

Quindi la potenza termica complessiva scambiata è:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{Lit} + \int_{Lit}^x h(T_w - T_b(x))pDdx = \dot{Q}_{Lit} + \int_{Lit}^x hpD(T_w - T_{bi}) \cdot e^{-\left(\frac{Nu \cdot (x-Lit)}{x_{rif}}\right)} dx = 468$$

$$- \left. \frac{hpDx_{rif} \cdot (T_w - T_{bi})}{Nu} \cdot e^{\left(\frac{Nu \cdot Lit}{x_{rif}}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{Nu \cdot x}{x_{rif}}\right)} \right|_{Lit}^x = 468 - 844.9 \cdot e^{-(0.17x)} \Big|_{2.5}^x = 1019 - 844.9 \cdot e^{-(0.17x)}$$

per $X > 2.5m$.



Si può notare dalla tabella riportata in appendice che a $X=22m$ la $T_b=0.99T_w$ e che a tale ascissa la potenza termica scambiata risulta essere pari a $999 W$ sul totale di $1019 W$. Per cui nei primi 22 metri si scambia il 98% del calore totale scambiato tra fluido e parete.

2.4 Verifica dell'ipotesi di flusso isoterma

Il problema è stato svolto facendo l'ipotesi di flusso isoterma, ossia le proprietà del fluido sono state assunte costanti e relative alla temperatura d'ingresso del fluido. Al fine di verificare tale ipotesi si procederà, analogamente al precedente paragrafo, fissando la lunghezza del condotto e calcolando le proprietà riferite alla temperatura media tra ingresso e uscita. Considerando un condotto di $30m$ si nota che nella sezione di uscita la T_b ha già raggiunto praticamente la T_w , tuttavia non si può applicare brutalmente la media aritmetica in quanto l'andamento della T_b è esponenziale:

$$T_b(X) = T_w + (T_0 - T_w) \cdot e^{\left(\frac{-Nu}{X_{rif}} \cdot X\right)} = 45 - 25e^{-0.24X} \quad \text{per } 0 < X < L_{IT}$$

$$T_b(X) = T_w + (T_{bi} - T_w) \cdot e^{\left(\frac{-Nu}{X_{rif}} \cdot (X - L_{IT})\right)} \quad \text{per } X > L_{IT};$$

quindi applicando il teorema della media si ottiene:

$$T_{bm}(X) = \frac{1}{30} \left(\int_0^{2.5} T_w + (T_0 - T_w) \cdot e^{\left(\frac{-Nu}{X_{rif}} \cdot X\right)} dx + \int_{2.5}^{30} T_w + (T_{bi} - T_w) \cdot e^{\left(\frac{-Nu}{X_{rif}} \cdot (X - L_{IT})\right)} dx \right) \Rightarrow$$

$$T_{bm}(X) = \frac{1}{30} \left(T_w \cdot x \Big|_0^{30} + \frac{x_{rif} \cdot (T_w - T_0)}{Nu} \cdot e^{\left(\frac{-Nu \cdot X}{X_{rif}}\right)} \Big|_0^{2.5} + \frac{x_{rif} \cdot (T_w - T_{bi})}{Nu} \cdot e^{\left(\frac{-Nu \cdot (X - L_{IT})}{X_{rif}}\right)} \Big|_{2.5}^{30} \right) \Rightarrow$$

$$T_{bm}(X) = \frac{1}{30} \left(45 \cdot x \Big|_0^{30} + \frac{20.92 \cdot (25)}{4.95} \cdot e^{\left(\frac{-4.95 \cdot X}{20.92}\right)} \Big|_0^{2.5} + \frac{20.92 \cdot (13.81)}{3.66} \cdot e^{\left(\frac{-3.66 \cdot (X - 2.5)}{20.92}\right)} \Big|_{2.5}^{30} \right) \Rightarrow$$

$$T_{bm}(X) = \frac{1}{30} \left(45 \cdot x \Big|_0^{30} + 105.7 \cdot e^{(-0.24X)} \Big|_0^{2.5} + 122.5 \cdot e^{(-0.17X)} \Big|_{2.5}^{30} \right) \Rightarrow$$

$$T_{bm}(X) = (1350 + 57.9 - 105.7 + 0.7 - 80) \frac{1}{30} = 40.8^\circ\text{C}$$

A questa temperatura le proprietà dell'acqua assumono i seguenti valori:

Densità	ρ	992 kg/m ³
Viscosità cinematica	ν	6.5 · 10 ⁻⁷ m ² /s
Calore specifico	c	4.1748 kJ/kg K
Conducibilità termica	k	0.6 W/m K

Quindi ricalcolando le grandezze principali del problema:

$$Re_D = \frac{U_i D}{\nu} = \frac{0.03 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{6.5 \cdot 10^{-7}} = 923 < 2300$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu \cdot \rho \cdot c}{k} = \frac{6.5 \cdot 10^{-7} \cdot 992 \cdot 4174.8}{0.6} = 4.49 > 1$$

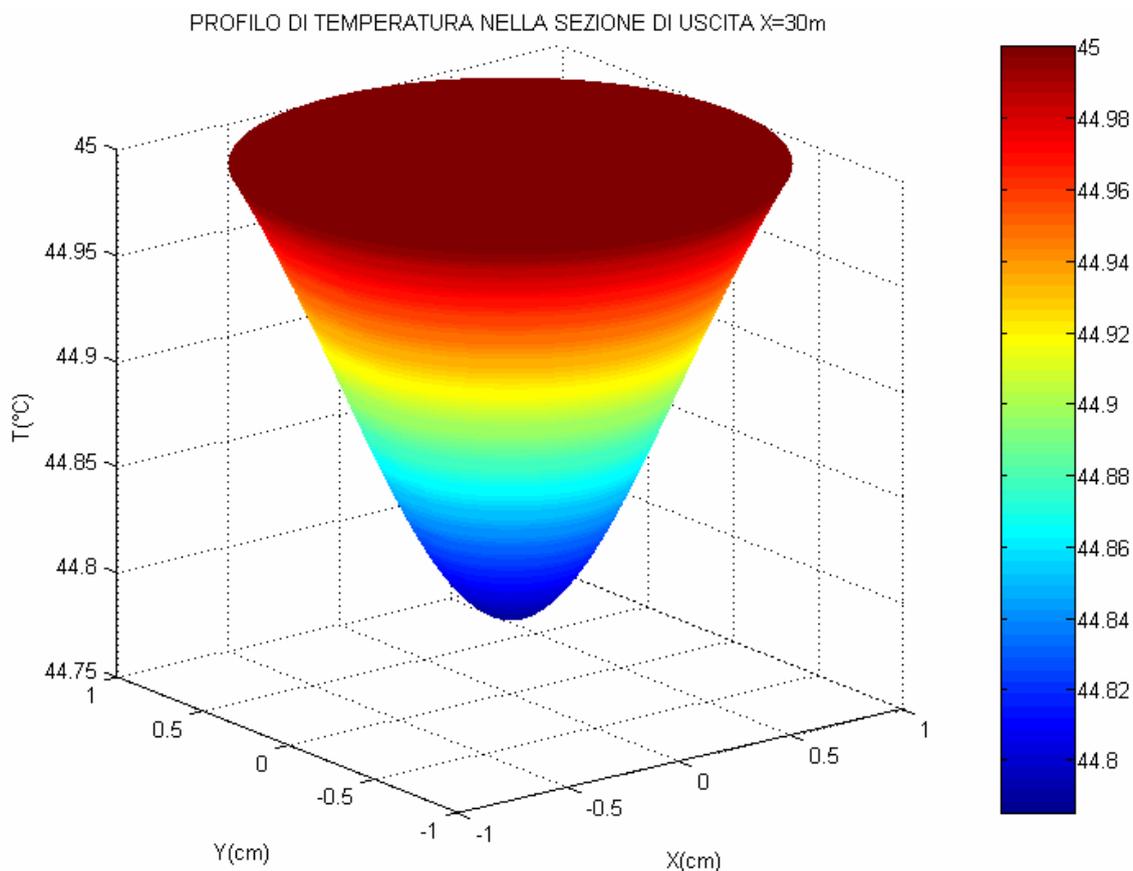
$$L_{ID} = 0.05 \cdot D \cdot Re_D = 0.05 \cdot 0.02 \cdot 923 = 0.92 \text{ m}$$

$$L_{IT} = 0.03 \cdot D \cdot Re_D \cdot Pr = 0.03 \cdot 0.02 \cdot 923 \cdot 4.49 = 2.49 \text{ m}$$

$$T_b(X) = 45 + (31.19 - 45) \cdot e^{\left(\frac{3.66}{20.92}(X-2.5)\right)} = 45 - 13.81 \cdot e^{(-0.17(X-2.5))} \Rightarrow$$

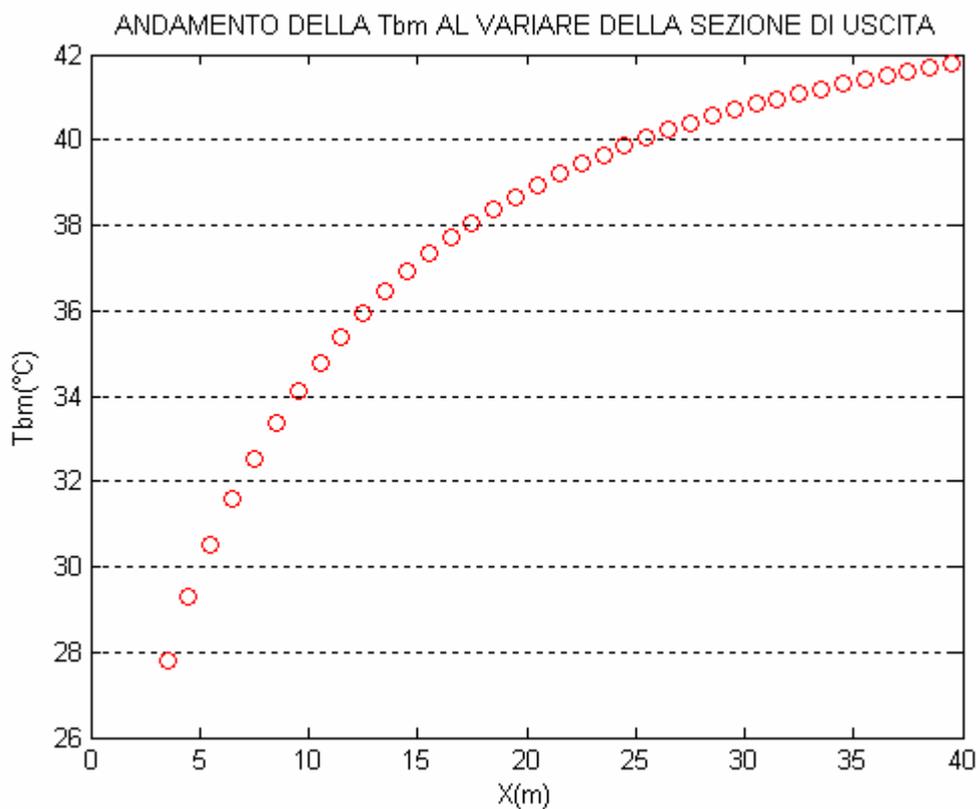
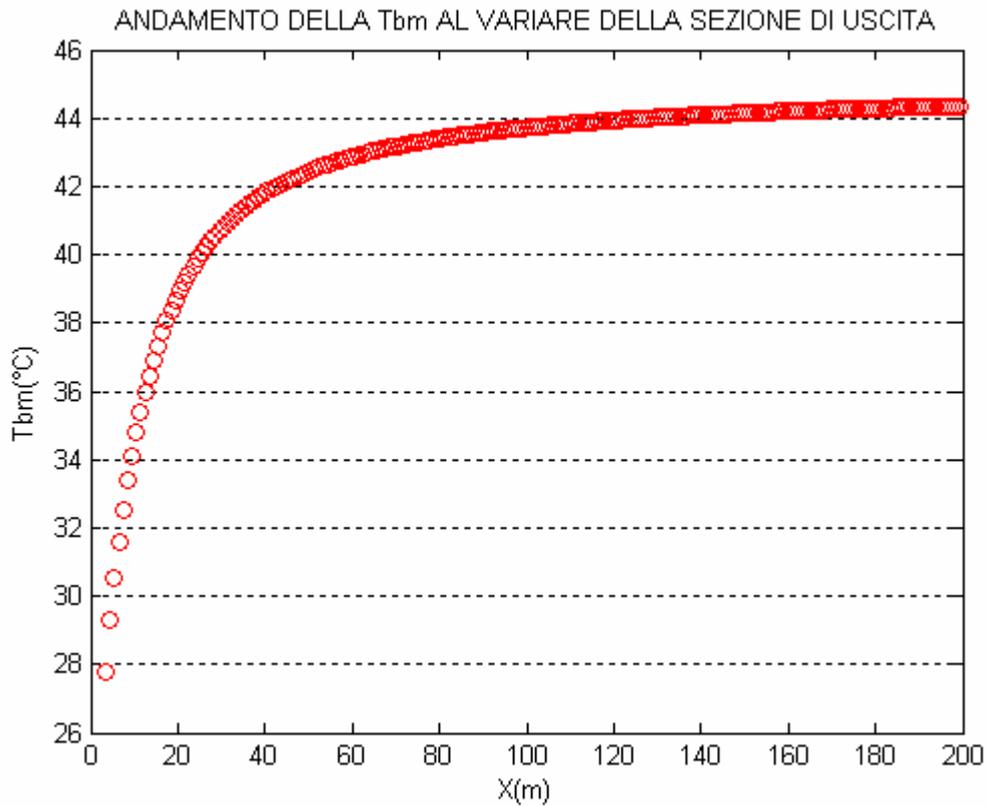
$$T_b(X = 30) = 45 + (31.19 - 45) \cdot e^{\left(\frac{3.66}{20.92}(30-2.5)\right)} = 45 - 13.81 \cdot e^{(-0.17(30-2.5))} = 44.87^\circ\text{C}$$

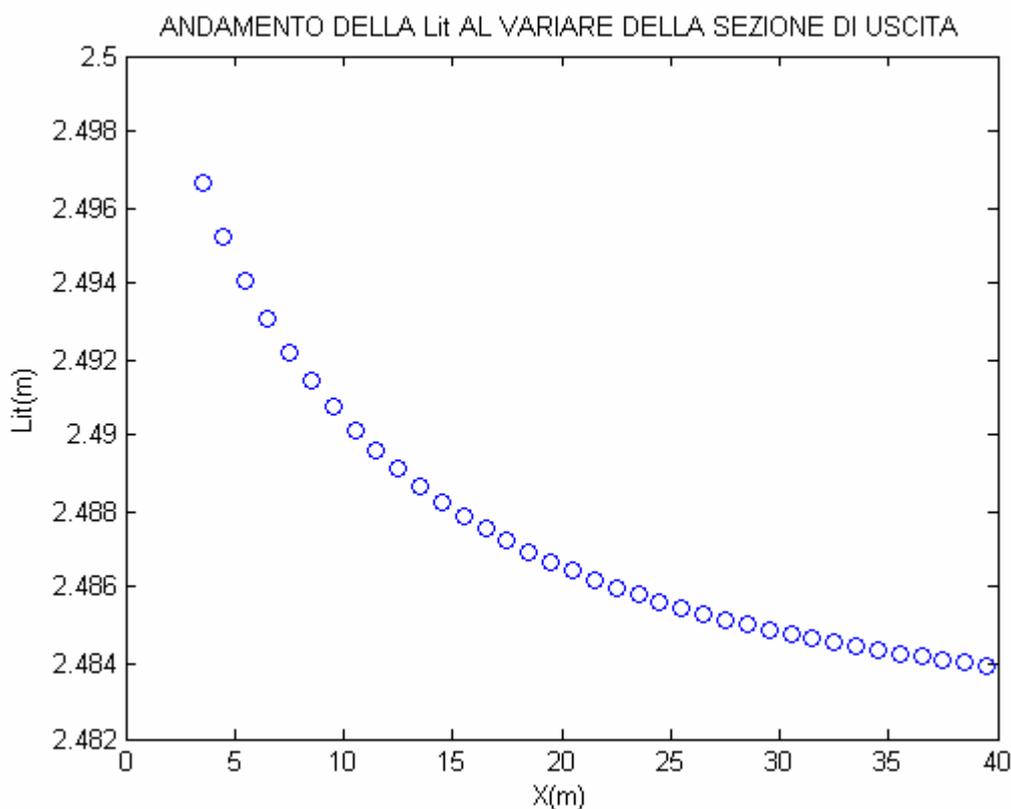
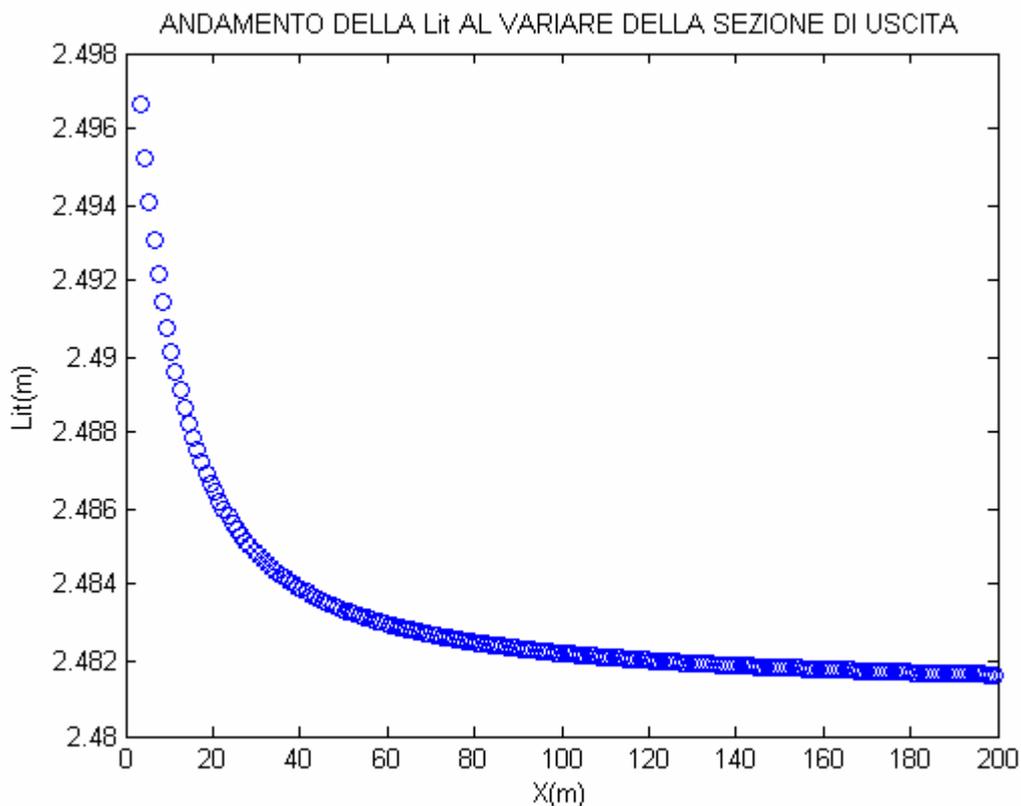
Quello che si nota è che pur variando Re_D e Pr l'andamento della T_b rimane sostanzialmente invariato e quindi anche la sua media. Questo è dovuto al fatto che la T_b dipende oltre che da X solo da L_{IT} , infatti $x_{rif} = \frac{D \cdot Re_D \cdot Pr}{4}$ ovvero contiene lo stesso gruppo da cui dipende L_{IT} e T_{bi} è funzione di L_{IT} dall'ipotesi che $T_{asse}(X=L_{IT})=20^\circ\text{C}$. Dato che la variazione di L_{IT} è trascurabile rispetto la lunghezza del condotto l'ipotesi di flusso isoterma è dunque verificata.



Tali osservazioni possono essere estese ad un condotto di lunghezza qualsiasi, infatti con l'ausilio del Matlab® ed usando le espressioni polinomiali per le

proprietà dell'acqua è possibile valutare la Lit per qualsiasi lunghezza del tubo. Il programma utilizzato si riporta in appendice, mentre nei seguenti grafici sono evidenziati i risultati.





Dai grafici si evince che la Lit oscilla tra 2.497m a 2.482m ed essendoci una variazione dell'ordine di millimetri, concludiamo che risulta pienamente verificata l'ipotesi di flusso isoterma fatta a monte, indipendentemente dalla

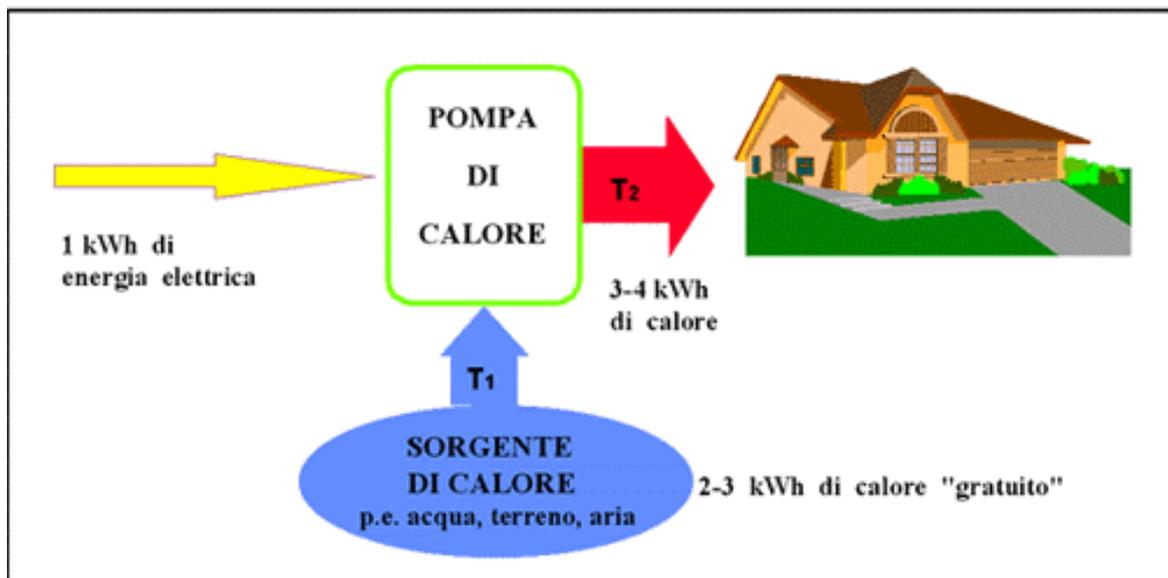
lunghezza del condotto. È infine importante osservare che il modello è tanto più attendibile quanto maggiore è la lunghezza del condotto, perché sarà sempre meno influente l'andamento approssimato di T_b nella zona d'imbocco.

3

Applicazioni tecniche

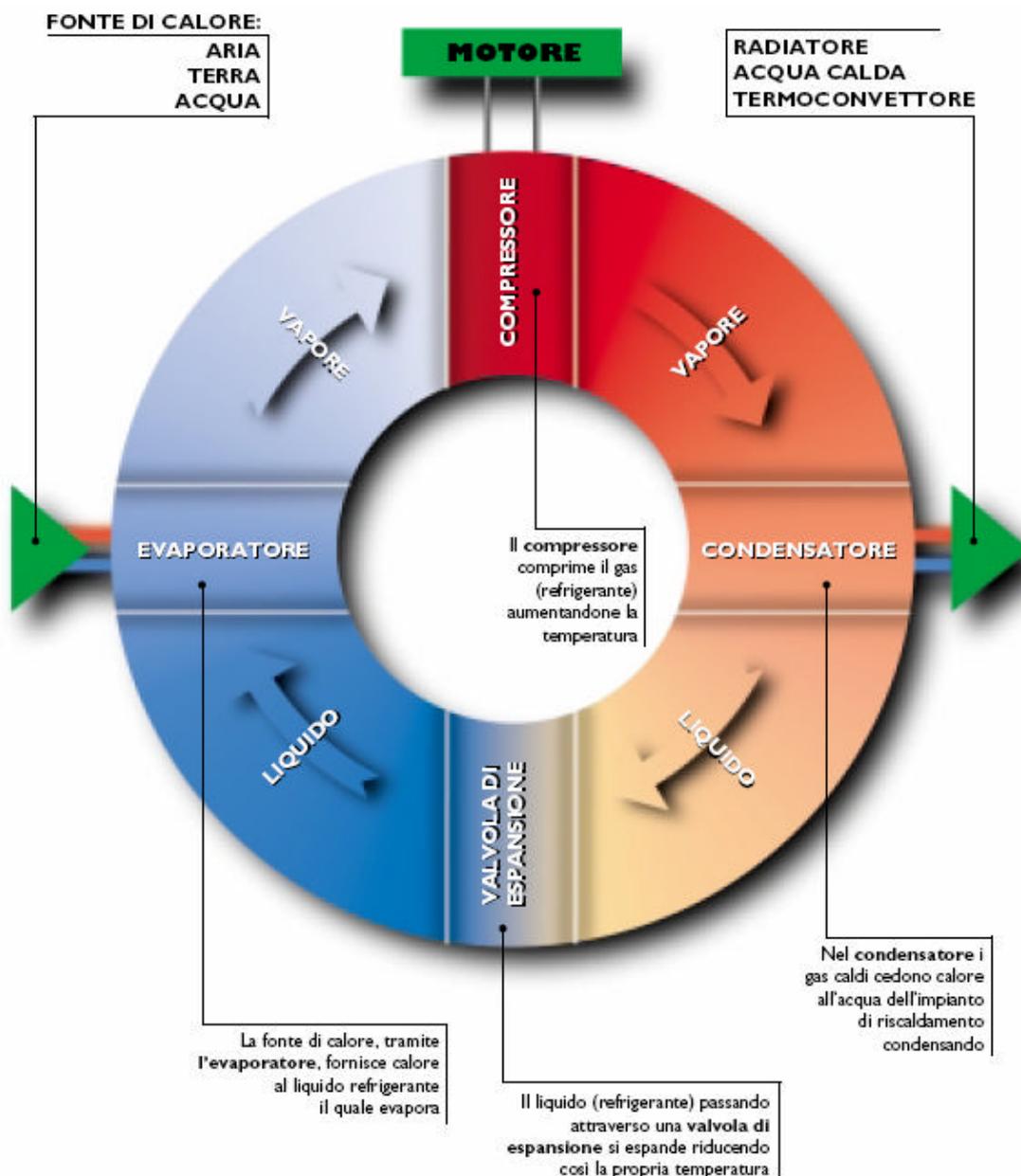
Una concreta applicazione di quanto detto finora è quella di un condensatore di una pompa di calore destinata all'erogazione di acqua sanitaria a 45°C. Di seguito si illustrerà il principio di funzionamento della pompa di calore, focalizzando successivamente l'attenzione sul condensatore e sul suo dimensionamento in relazione al modello matematico sviluppato precedentemente.

3.1 Pompa di calore



La pompa di calore è una macchina per il riscaldamento di edifici e per la preparazione di acqua calda. Si tratta di una valida ed ecologica alternativa alla caldaia a olio o a gas. In natura esistono immense riserve di energia, purtroppo inutilizzabile direttamente per il riscaldamento, poiché i fluidi (aria, acqua) o i corpi (suolo) che la contengono si trovano a temperature troppo basse. La pompa di calore è una macchina in grado di trasferire calore da un corpo a temperatura

più bassa ad un corpo a temperatura più alta. Tale processo è inverso rispetto a quello che avviene spontaneamente in natura ed è dovuto al fatto che viene fornita energia elettrica alla macchina che “pompa calore”. Il principio di funzionamento che sta alla base della pompa di calore è un ciclo termodinamico chiamato ciclo frigorifero, o ciclo motore inverso, ed è analogo a quello che sta alla base di un comune frigorifero. Nel caso in cui si abbia sia l’interesse a riscaldare (ad esempio durante l’inverno) che a rinfrescare (ad esempio, durante l’estate), la pompa si dice “reversibile”.



La pompa di calore è costituita da un circuito chiuso (costituito da un compressore, un condensatore, una valvola di espansione ed un evaporatore) percorso dal fluido frigorifero (come R-134a, R-32, R-125, R-507, NH₃, CO₂, ecc.). Il ciclo termodinamico che il fluido refrigerante subisce consiste in una compressione, una condensazione, un'espansione e un'evaporazione:

- compressione: il fluido frigorifero allo stato gassoso e a bassa pressione, proveniente dall'evaporatore, viene portato ad alta pressione e di conseguenza a maggiore temperatura; inoltre nella compressione assorbe ulteriore quantità di calore dal lavoro del compressore;
- condensazione: il fluido frigorifero, attraversando il condensatore, passa dallo stato gassoso a quello liquido cedendo calore all'interno (aria o acqua);
- espansione: passando attraverso la valvola di espansione il fluido frigorifero viene portato a pressioni minori e di conseguenza a temperature più basse;
- evaporazione: il fluido frigorifero, attraversando l'evaporatore, assorbe calore dall'esterno ed evapora completamente.

L'insieme di queste trasformazioni costituisce il ciclo della pompa di calore: utilizzando l'energia del compressore il fluido frigorifero nell'evaporatore, assorbe calore dal mezzo circostante e, tramite il condensatore, lo cede al mezzo da riscaldare.

Nel corso del suo funzionamento, la pompa di calore:

- consuma energia elettrica nel compressore;
- assorbe calore nell'evaporatore, dal mezzo circostante, che può essere aria o acqua;
- cede calore al mezzo da riscaldare nel condensatore (aria o acqua).

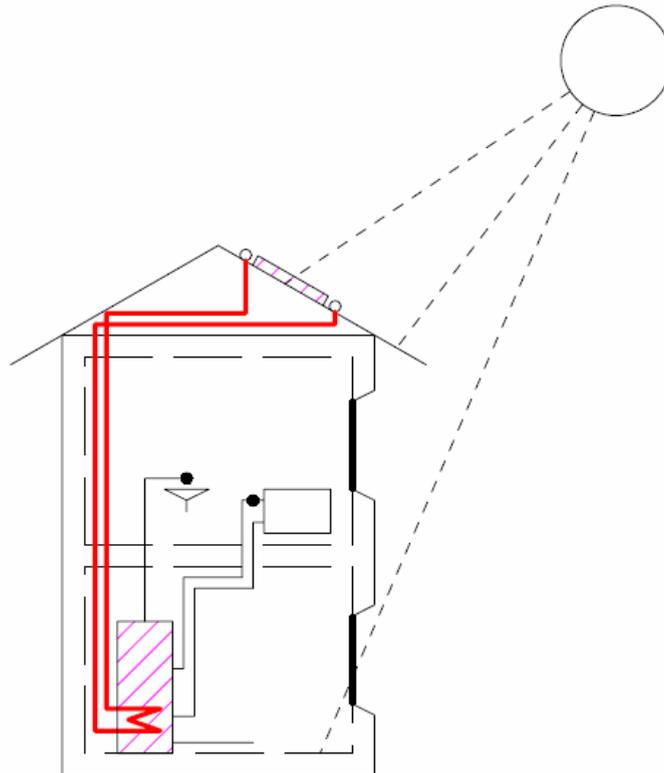
Il vantaggio nell'uso della pompa di calore deriva dalla sua capacità di fornire più energia (calore) di quella elettrica impiegata per il suo funzionamento in quanto estrae calore dall'ambiente esterno (aria-acqua).

L'efficienza di una pompa di calore è misurata dal coefficiente di prestazione "C.O.P." che è il rapporto tra energia fornita (calore ceduto al mezzo da riscaldare) ed energia elettrica consumata.

L'ambiente da cui si estrae calore è la sorgente fredda. Le principali sorgenti fredde sono aria, acqua e terreno. Il fluido vettore da scaldare è detto pozzo caldo; generalmente si tratta di acqua o aria. Nel condensatore il fluido frigorigeno cede al pozzo caldo sia il calore prelevato dalla sorgente che l'energia fornita dal compressore. Il calore può poi essere ceduto all'ambiente mediante normali serpentine inserite nel pavimento, radiatori o ventilatori-convettori (nel caso di distribuzione con circuito d'acqua), oppure canalizzazioni per il trasferimento del calore ai diversi locali (nel caso di distribuzione del calore mediante aria). In base alla sorgente fredda e al pozzo caldo utilizzato le pompe di calore possono essere: aria – acqua, terra – acqua, acqua – acqua, aria – aria, acqua – aria.

Le prestazioni di una pompa di calore variano sensibilmente in funzione delle temperature di sorgente fredda e pozzo caldo. In particolare, più queste temperature sono vicine migliori sono le prestazioni, sia in termini di potenza fornita che in termini di COP, o rapporto tra energia termica fornita ed energia elettrica assorbita. Per questo motivo è consigliabile adottare sistemi di distribuzione del calore funzionanti a temperatura più bassa possibile. Questo è possibile adottando delle serpentine allagate nel pavimento o dei corpi riscaldanti previsti per funzionare a temperature massime di 45-50°C.

La combinazione con impianti termosolari può essere molto interessante. In questo caso la pompa di calore può estrarre calore dal circuito dei collettori solari, garantendo anche un miglior funzionamento dell'impianto solare. Questa soluzione è particolarmente interessante se applicata alla produzione di acqua calda sanitaria.



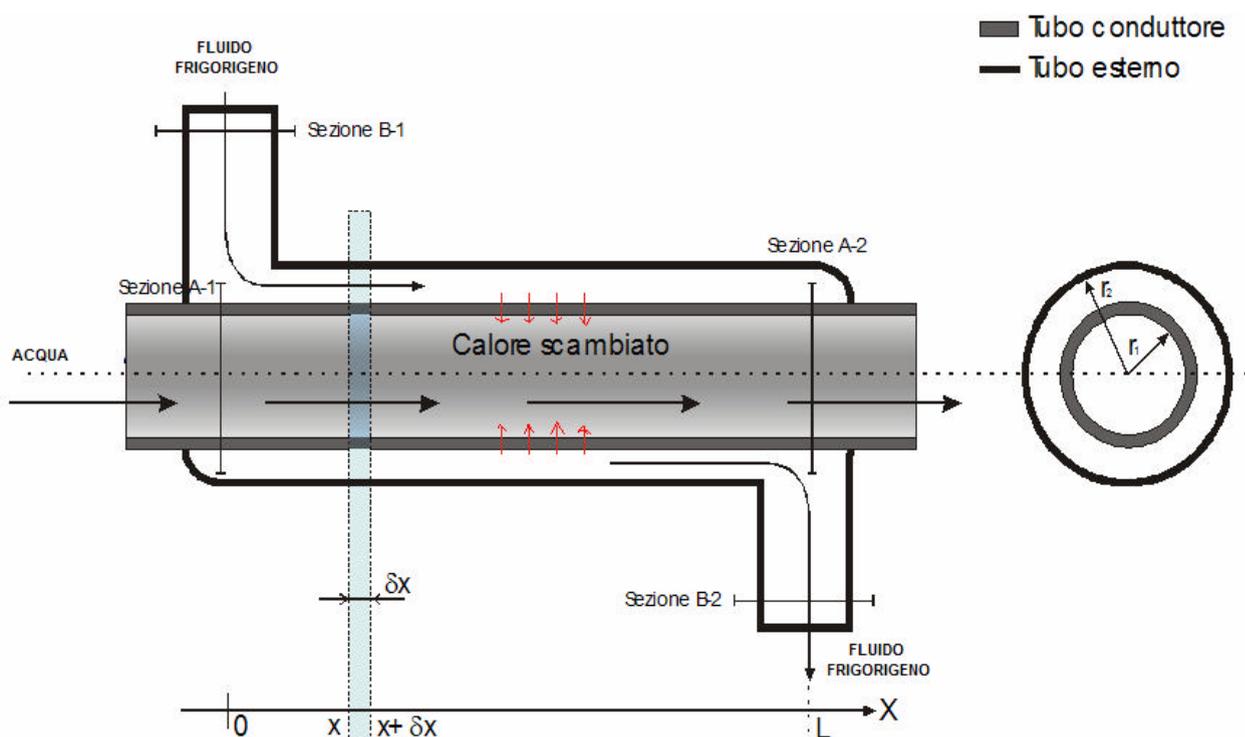
Combinazione tra un impianto termosolare e una pompa di calore

3.2 Condensatore

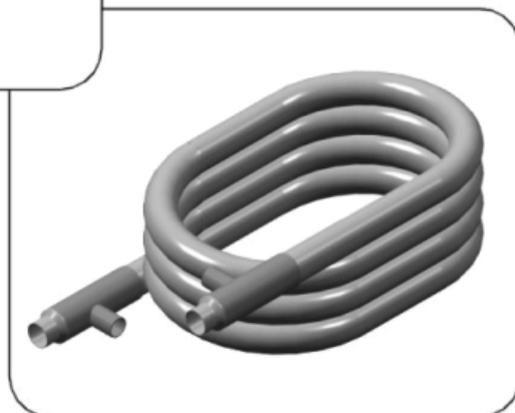
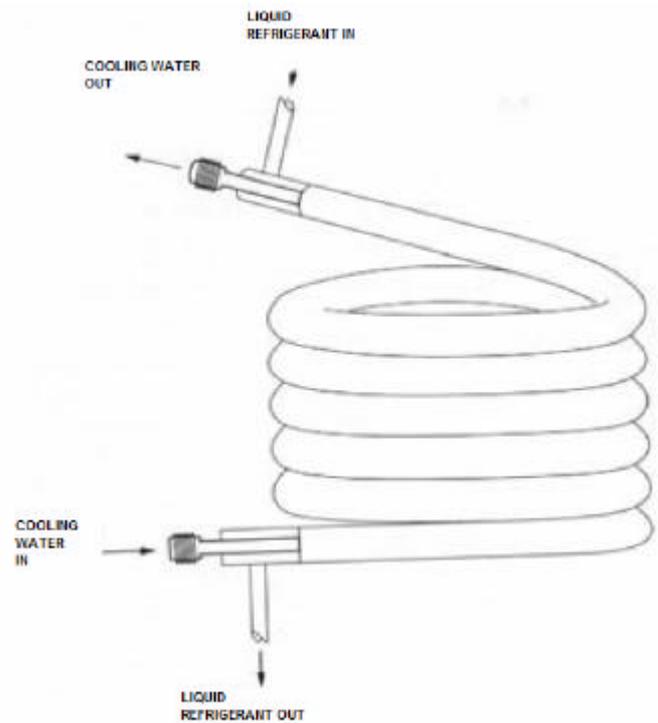
Come già evidenziato, il condensatore è un particolare scambiatore di calore in cui il trasferimento di energia termica da un fluido a un altro avviene tramite la condensazione di uno dei due. Nell'utilizzo nelle pompe di calore il fluido che cede calore condensandosi è il fluido frigorigeno. Nella tabella seguente si riportano alcuni fluidi utilizzati per pompe di calore, classificati in base alla loro temperatura massima di condensazione.

FLUIDO FRIGORIGENO	TEMPERATURA DI CONDENSAZIONE
R 22	<50°C
R 717	< 50°C
R 12	< 75°C
R 134	< 75°C
R 114	<120°C

Tra i diversi tipi di condensatori quelli che possono essere analizzati con il modello matematico sviluppato precedentemente sono i condensatori coassiali. Questi sono costituiti da due tubi concentrici, in cui passano due fluidi a temperature diverse. Il tubo interno dovrà essere fatto con materiali ad alta conducibilità termica, per consentire uno scambio più alto possibile di calore tra i due fluidi: si userà quindi in generale un metallo ad altissima conducibilità, per esempio l'acciaio che offre inoltre un'alta resistenza all'usura. Per quanto riguarda il tubo esterno, non si ha alcuna necessità perché questo sia fortemente conduttivo, per cui si useranno metalli a bassa conducibilità termica (anche se non necessariamente un isolante).



Nella pratica tecnica i condensatori coassiali sono utilizzati per impianti di piccola taglia, ovvero per superfici di scambio non elevate, mentre gli ingombri sono ridotti dalla loro forma a spirale.



3.3 Dimensionamento di un condensatore coassiale

Il fine ultimo è quello di ottenere acqua sanitaria ad una temperatura di 45°C. Si utilizza una pompa di calore dotata di un condensatore coassiale: l'obiettivo è di ricercare l'area della superficie di scambio necessaria affinché si realizzi la potenza termica scambiata opportuna. I dati in ingresso sono:

temperatura di ingresso dell'acqua: $T_{in}=20^{\circ}C$

temperatura di uscita dell'acqua: $T_{out}=45^{\circ}C$

temperatura di condensazione: $T_{cond}=45^{\circ}C$

portata massica dell'acqua: $\dot{m}=10g/s$

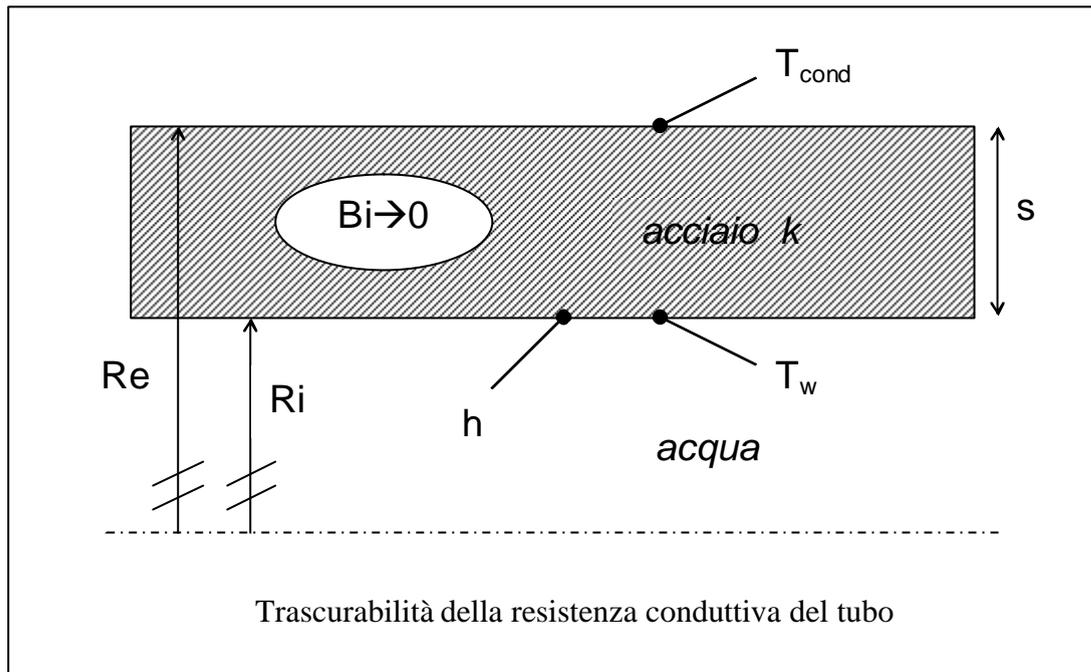
diametro interno del tubo interno: $D=2cm$

Dato che il tubo interno del condensatore ha piccolo spessore ed alto coefficiente di conducibilità termica, la temperatura T_w della parete interna al tubo si può considerare pari alla temperatura di condensazione. Questo può essere messo in evidenza verificando che sia piccolo il numero di Biot, cioè il rapporto tra la resistenza termica conduttiva del tubo e quella convettiva dell'interfaccia tubo-acqua:

$$Bi = \frac{\text{resistenza conduttiva}}{\text{resistenza convettiva}}$$

$$Bi = \frac{h \cdot s}{k} = \frac{109.8 \cdot 10^{-3}}{40} = 0.003$$

con h coefficiente convettivo tubo-acqua, s spessore del tubo, k coefficiente conduttivo dell'acciaio. Si noti che in tale calcolo si è supposta una geometria piana, dato che lo spessore del tubo è piccolo rispetto al suo raggio.



Pertanto si può utilizzare il modello sviluppato a temperatura di parete imposta. Gli andamenti delle temperature dei due fluidi e della potenza termica scambiata in funzione della lunghezza del tubo sono noti, quindi:

$$\dot{Q}(x) = 1018 - 844.9 \cdot e^{-(0.17x)}$$

la quale è stata ottenuta considerando le proprietà dell'acqua ad una temperatura pari alla media aritmetica tra la temperatura di ingresso e quella di uscita. Come già è stato osservato la temperatura in uscita dell'acqua tenderà asintoticamente a 45°C, ovvero raggiungerà tale temperatura in caso di scambiatore infinito. Tuttavia per $x=22m$ la T_{out} risulta essere pari al 99% della T_w , mentre la potenza termica scambiata è il 98% di quella necessaria.

La superficie di scambio è dunque:

$$A = pDx = p \cdot 0.02 \cdot 22 = 1.38 \text{ m}^2$$

Supponendo che per motivi di ingombro si debba avvolgere il tubo a spirale con un diametro di 25 cm si ottiene:

$$\text{numero di avvolgimenti} = \frac{22}{p \cdot 0.25} \cong 28$$

$$\text{altezza della spirale} = 28 \cdot 2 = 56 \text{ cm}$$

Le dimensioni del condensatore sono dunque $25 \times 25 \times 56 \text{ cm}$.

Al fine di ridurre gli ingombri e di risparmiare in materiale si può scegliere una T_{out} leggermente inferiore, ad esempio pari al 95% della T_w ; in tal caso:

$$T_{out} = 43^\circ\text{C}$$

$$A = pDx = p \cdot 0.02 \cdot 14 = 0.87 \text{ m}^2$$

$$\text{numero di avvolgimenti} = \frac{14}{p \cdot 0.25} \cong 18$$

$$\text{altezza della spirale} = 18 \cdot 2 = 36 \text{ cm}$$

Le dimensioni del condensatore sono dunque $25 \times 25 \times 36 \text{ cm}$.

Un'altra strada per ridurre le dimensioni del condensatore è quella di aumentare la T_{cond} ponendola ad esempio pari a 50°C (si noti però che questo va a penalizzare l'efficienza complessiva della pompa di calore). In tal caso si va a modificare il profilo di temperatura all'interno del tubo, quindi la potenza termica scambiata:

$$T(X, R) = \left(-3.31 \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + 2.34 \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^4 - 1.15 \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^6 + 0.4 \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^8 - 0.11 \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^{10} + 1.81 \right) \cdot [(T_{bi} - T_w) \cdot e^{\left(\frac{Nu}{x_{rif}} (X - L_i) \right)}] + T_w$$

per $X > 2.5 \text{ m}$;

$$T(2.5, 0) = (1.81) \cdot [(T_{bi} - 50) \cdot e^{\left(\frac{3.66}{20.92} \cdot 0 \right)}] + 50 = 20 \Rightarrow 1.81 \cdot T_{bi} - 90.5 + 50 = 20 \Rightarrow T_{bi} = \frac{60.5}{1.81} = 334.3^\circ\text{C}$$

$$\dot{m}cT_{b0} + \dot{Q}_{Lit} = \dot{m}cT_{bi} \Rightarrow \dot{Q}_{Lit} = \dot{m}c(T_{bi} - T_{b0}) = 10 \cdot 4.1825 \cdot (13.43) = 562 \text{ W}$$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{Lit} + \int_{Lit}^x h(T_w - T_b(x)) pD dx = \dot{Q}_{Lit} + \int_{Lit}^x h p D (T_w - T_{bi}) \cdot e^{-\left(\frac{Nu \cdot (x - Lit)}{x_{rif}} \right)} dx = 562$$

$$- \frac{h p D x_{rif} \cdot (T_w - T_{bi})}{Nu} \cdot e^{\left(\frac{Nu \cdot Lit}{x_{rif}} \right)} \cdot e^{-\left(\frac{Nu \cdot x}{x_{rif}} \right)} \Bigg|_{Lit}^x = 562 - 1148.7 \cdot e^{-(0.17x)} \Bigg|_{2.5}^x = 1313 - 1148.7 \cdot e^{-(0.17x)}$$

per $X > 2.5 \text{ m}$.

Al fine di ottenere $T_{out} = 45^\circ\text{C}$ è necessaria, come al caso precedente, $\dot{Q} = 1018$, quindi la lunghezza del tubo sarà:

$$1018 = 1313 - 1148.7 \cdot e^{-(0.17x)} \Rightarrow 295 = 1148.7 \cdot e^{-(0.17x)} \Rightarrow \ln 0.256 = -0.17x \Rightarrow x = 8m.$$

Da cui:

$$T_{out} = 45^\circ C$$

$$A = pDx = p \cdot 0.02 \cdot 8 = 0.50 m^2$$

$$\text{numero di avvolgimenti} = \frac{8}{p \cdot 0.25} \cong 10$$

$$\text{altezza della spirale} = 10 \cdot 2 = 20 cm$$

Le dimensioni del condensatore sono dunque $25 \times 25 \times 20 cm$.

Appendice

A.1 Script del metodo delle approssimazioni successive

```
clc
clear all
x0=1;
A=[x0/8 4; -0.5*x0 2;x0*3/8 0];
a=[2 3;-2 1];
r=0;
while(r<20)
r=r+1;
sd=0;
somma=0;
som=0;
s=length(A(:,1));
for i=1:2 % moltiplica teta ottenuto per 2(r-r^3)
for j=1:s
sd=sd+1;
P(sd,1)=a(i,1)*A(j,1);
P(sd,2)=a(i,2)+A(j,2);
end
end
for i=1:sd %trova l'esponente massimo
cont=0;
for j=1:sd
if(P(i,2)>=P(j,2))
cont=cont+1;
if(cont==sd)
max=P(i,2);
end
end
end
end
for i=1:2:max %ordina vettore
Pord=0;
for t=1:sd
if(i==P(t,2))
Pord=Pord+P(t,1);
end
end
Por((i+1)/2,1)=Pord;
Por((i+1)/2,2)=i;
end
lun=length(Por(:,1));
for i=1:lun %prima integrazione e divide per r
IP(i,:)=If2(Por(i,1),Por(i,2));
end
for j=1:lun %seconda integrazione quindi soluzione funzione di Nu
Sol(j,:)=If(IP(j,1),IP(j,2));
end
for i=1:lun %calcola seconda costante integrativa
som=som+Sol(i,1);
end
C2=[-som 0];
Sol(lun+1,:)=C2;
for w=1:lun %calcolo di Nu
DSol(w,:)=df(Sol(w,1),Sol(w,2));
end
end
```

```

for o=1:lun
    somma=somma+DSol(o,1);
end
if(fix((r+1)/2)==(r+1)/2)
Nu=1/(-2*somma)^(1/r)
Nuv(r)=Nu;
err(r)=Nu-3.66;
end
A=Sol;
end
% termine della routine
Soluzione(:,1)=Nu^(r+1)*Sol(:,1); % soluzione finale
Soluzione(:,2)=Sol(:,2);
Soluzione
k=0;
x=[-1:0.01:1];
for x1=-1:0.01:1
    % plotta soluzione e convergenza di Nu
    k=k+1;
    teta(k)=Soluzione(lun+1,1);
for v1=1:lun
teta(k)=teta(k)+(Soluzione(v1,1))*x1^(Soluzione(v1,2));
end
end
cunt=100;
dcu=0;
for xfun=0:0.01:1
    % plot 3D e altri plot necessari all'esposizione dei dati
    cunt=cunt+1;
    for x3=-xfun:0.01:xfun
dcu=dcu+1;
FUN(dcu)=teta(cunt);
XX(dcu)=x3;
Y(dcu)=sqrt(((xfun^2)-(x3^2)));
end
end
plot(x,teta)
pause
plot(Nuv,'o')
pause
X(1,:)=XX;
X(2,:)=XX;
X(3,:)= -XX;
X(4,:)= -XX;
Y1(1,:)=Y;
Y1(2,:)= -Y;
Y1(3,:)= -Y;
Y1(4,:)=Y;
FUNZ(1,:)=FUN;
FUNZ(2,:)=FUN;
FUNZ(3,:)=FUN;
FUNZ(4,:)=FUN;
mesh(X,Y1,FUNZ)
pause
cont3=0;
cont4=0;
for t=-1:0.01:1
    cont3=cont3+1;
    Tw(cont3)=45;
    Tb(cont3)=45+(28.9-45)*exp(-0.176*(cont3+1.5-0.12));
    xxx(cont3)=cont3;
end
cont5=0;
for t2=-1:0.01:1
cont5=cont5+1;

```

```

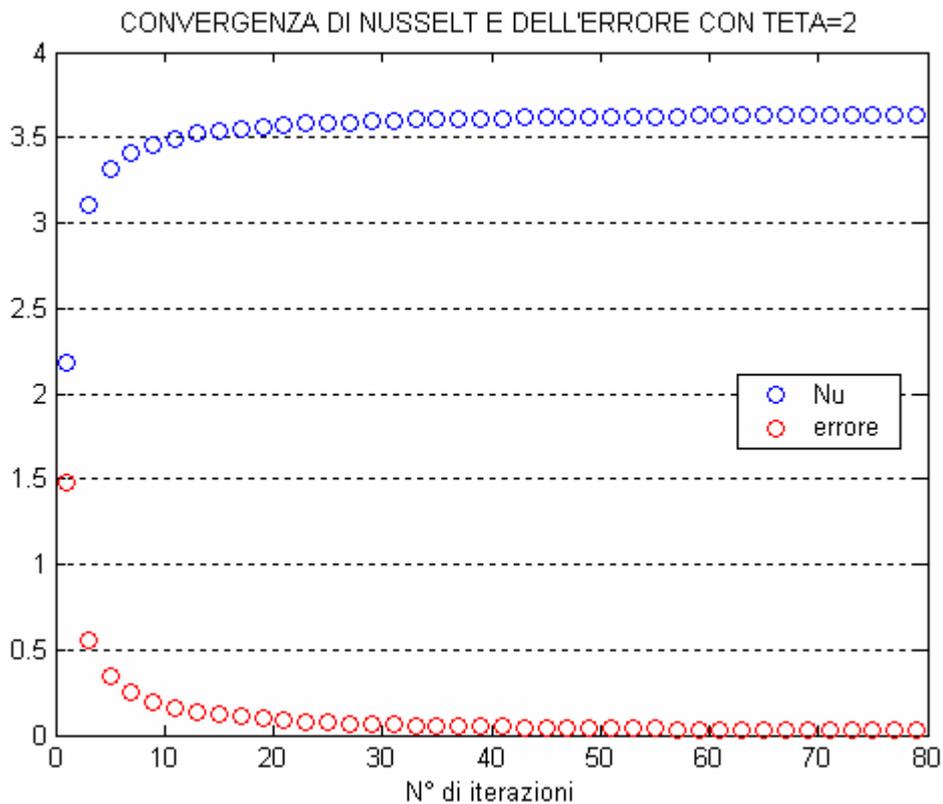
cont4=0;
for t1= 1:0.01:1
cont4=cont4+1;
T(cont5,cont4)=45+(teta(cont4)*(Tb(cont5)-45));
XXX(cont5,cont4)=cont5;
end
end
plot(xxx,Tb,'o',xxx,Tw,'ro')
pause
R=meshgrid(x);
meshc(XXX,R,T)
pause
TETA=meshgrid(teta);
meshc(XXX,R,TETA)
pause
c=0;
cunt=100;
for xfun=0:.01:1           %plot 3D di T
    cunt=cunt+1;
    for x3=-xfun:.01:xfun
        c=c+1;
        T1(c)=T(3,cunt);
    end
end
T2(1,:)=T1;
T2(2,:)=T1;
T2(3,:)=T1;
T2(4,:)=T1;
mesh(X,Y1,T2)

```

A.2 Analisi di convergenza del metodo delle approssimazioni successive

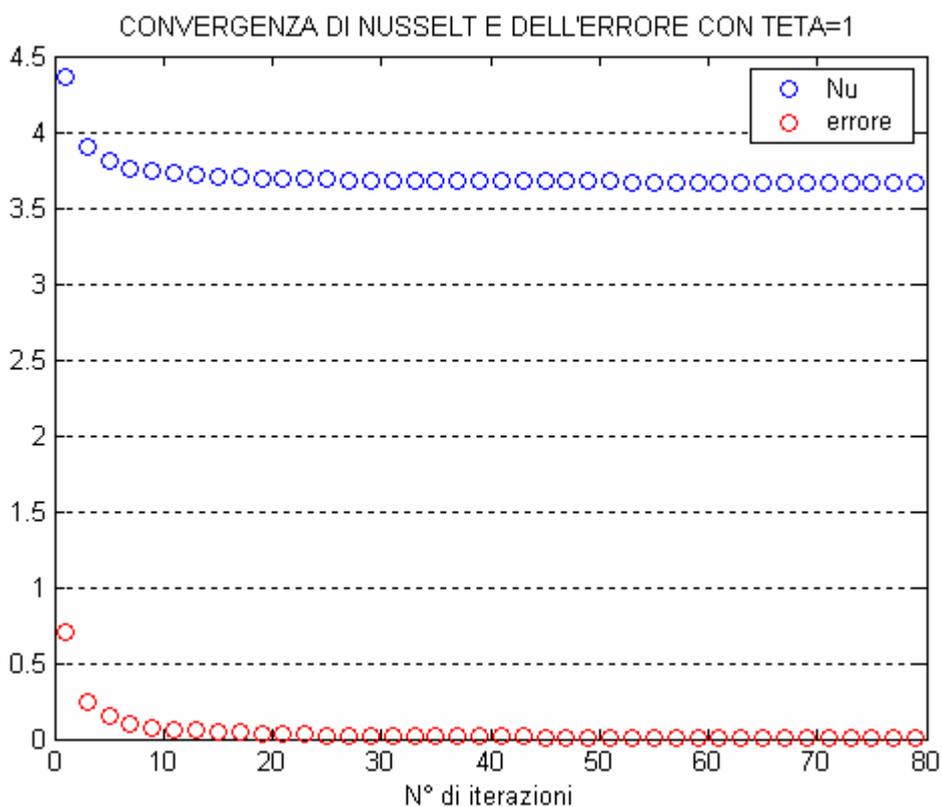
In seguito si riportano i risultati di convergenza relativi ad 81 iterazioni del numero di Nusselt con $J(r)$ di tentativo pari a 2:

iterazione	Nu	iterazione	Nu
1	1.00000000000000	43	3.61303867972755
3	2.18181818181818	45	3.61506212785668
5	3.10152987233384	47	3.61690670050832
7	3.31307353826703	49	3.61859511268523
9	3.40784879691385	51	3.62014638957299
11	3.46166314932388	53	3.62157658651176
13	3.49635014680219	55	3.62289934672059
15	3.52056761985600	57	3.62412633788630
17	3.53843364412391	59	3.62526759723980
19	3.55215704949988	61	3.62633180674286
21	3.56302890303343	63	3.62732651436023
23	3.57185429390564	65	3.62825831335088
25	3.57916131974200	67	3.62913298858561
27	3.58531077211800	69	3.62995563675578
29	3.59055752739177	71	3.63073076575120
31	3.59508675444872	73	3.63146237730056
33	3.59903621991220	75	3.63215403607328
35	3.60251054391167	77	3.63280892776155
37	3.60559060308473	79	3.63342990813992
39	3.60833990454989	81	3.63401954469603
41	3.61080901121044		



Ora si riportano i risultati di convergenza relativi ad 81 iterazioni del numero di Nusselt con $J(r)$ di tentativo pari a 1:

iterazione	Nu	iterazione	Nu
1	1.00000000000000	43	3.67464006588184
3	4.36363636363636	45	3.67380806302924
5	3.90768277303116	47	3.67305017999375
7	3.80572212339154	49	3.67235693459645
9	3.76257012085850	51	3.67172039591722
11	3.73880299719187	53	3.67113387953256
13	3.72375656941378	55	3.67059171188569
15	3.71337529538384	57	3.67008904615977
17	3.70578075948174	59	3.66962171698240
19	3.69998365510442	61	3.66918612473158
21	3.69541340028870	63	3.66877914263829
23	3.69171780523325	65	3.66839804161176
25	3.68866771007483	67	3.66804042896444
27	3.68610757767345	69	3.66770419812792
29	3.68392812570257	71	3.66738748712648
31	3.68205032209583	73	3.66708864407907
33	3.68041559562538	75	3.66680619837996
35	3.67897961697423	77	3.66653883649654
37	3.67770821806038	79	3.66628538154386
39	3.67657463837574	81	3.66604477596561
41	3.67555762076387		



Da un punto di vista numerico si può notare che la velocità di convergenza del metodo dipende dal valore iniziale di tentativo. Da un punto di vista

ingegneristico il valore cui si fa riferimento è 3.66, il quale coincide con il risultato riscontrabile in letteratura.

A.3 Soluzione ottenuta con $J(r)$ di tentativo pari a 1

$$J(r) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} r^{2n}$$

n	coefficiente	esponente	n	coefficiente	esponente
1	1,811750880968	0	11	0,000018812265	20
2	-3,312599384310	2	12	-0,000002360156	22
3	2,342336315669	4	13	0,000000268830	24
4	-1,148829548431	6	14	-0,000000028443	26
5	0,398952265369	8	15	0,000000002773	28
6	-0,113198368215	10	16	-0,000000000254	30
7	0,026011515087	12	17	0,000000000022	32
8	-0,005194508066	14	18	-0,000000000002	34
9	0,000891515479	16	19	0,000000000000	36
10	-0,000137378587	18	20	0,000000000000	38

A.4 Bulk temperature al variare della lunghezza del condotto nel caso di temperatura imposta alla parete

sezione condotto [m]	Tb [°C]	sezione condotto [m]	Tb [°C]
2,5	31,1900000000000	13,5	42,8715522303330
3,5	33,3489888828039	14,5	43,2043035027689
4,5	35,1704518426483	15,5	43,4850340440007
5,5	36,7071560566026	16,5	43,7218765245821
6,5	38,0036193354312	17,5	43,9216921925240
7,5	39,0973997897880	18,5	44,0902696413713
8,5	40,0201838762097	19,5	44,2324925038354
9,5	40,7987043432388	20,5	44,3524809290119
10,5	41,4555146702713	21,5	44,4537109417322
11,5	42,0096424343659	22,5	44,5391151418478
12,5	42,4771405328317		

A.5 Script per il calcolo di L_{IT} al variare della lunghezza del condotto nel caso di temperatura imposta alla parete

```

clc
clear all
n=200
k=0.6
for i=1:n
    Tbm(i)=(45*(2.51+i)-47.8+(122.5*exp(-0.17*(2.51+i)))-80)*1/(2.51+i);
    Ro(i)=1000.2+0.003689*Tbm(i)-0.005597*Tbm(i)^2+0.00001393*Tbm(i)^3;
    ni(i)=10^-6*(1/(0.544+0.0219*Tbm(i)+0.00006098*Tbm(i)^2));

```

```
c(i)=(0.000003*Tbm(i)^4)-(0.0008*Tbm(i)^3)+(0.084*Tbm(i)^2)-(3.5516*Tbm(i))+4225.9;
Red(i)=(0.03*0.02)/(ni(i));
Pr(i)=ni(i)*Ro(i)*c(i)/k;
Lit(i)=0.03*0.02*Red(i)*Pr(i);
X(i)=2.51+i;
end
plot(X,Tbm,'ro')
pause
plot(X,Lit,'o')
```

Bibliografia

- [1] ENEA, *La pompa di calore*, <http://www.enea.it>, 1999
- [2] B.Hildbrand, *Impianti solari per montatori d'impianti di riscaldamento e sanitari*, SWISSOLAR, <http://www.isaac.supsi.ch>, 2000
- [3] G.Cuccurullo,P.G.Berardi, *Elementi di termodinamica e trasmissione del calore*, Cues, 2002
- [4] R.Lazzarin, *Slide corso di fisica tecnica*, Università di Padova, Ingegneria gestionale, 2006, <http://www.gest.unipd.it>
- [5] Klimax Italia s.r.l., *Scambiatori coassiali*, <http://klimalitalia.com/coax-cat/COAX-CAT.htm>
- [6] Morelli s.p.a., *condensatori coassiali*, <http://www.morellispa.it>
- [7] <http://www.elettricit.ch>