

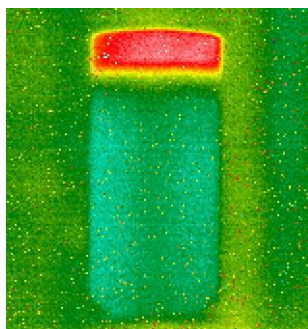
Università degli studi di Salerno



Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Ingegneria Meccanica

Tesina in
TRASMISSIONE DEL CALORE

*Determinazione della costante dielettrica di un materiale
attraverso la misurazione della temperatura con
telecamera a raggi infrarossi in un forno a microonde*



Docente:

Prof. Ing. Gennaro Cuccurullo

Studenti:

Dario Marra 06203/50

Mauro Sammarco 06203/66

Antonio Mariani 06203/57

Indice

Capitolo I

Il campo elettromagnetico	4
Meccanismi di interazione	4
Proprietà dielettriche dei materiali	6
Profondità di penetrazione del campo elettrico	9
Potenza termica generata dalle onde elettromagnetiche	11

Capitolo II

Modello analitico	14
Modello analitico approssimato	20

Capitolo III

Setup dei dati	22
Preparazione dei materiali e della strumentazione	22
Esecuzione delle prove	22
Raccolta dati ed elaborazione	23
Stima dei parametri	25
Risultati	
Acqua pura	26
Acqua con 2% di sale	27
Acqua con 4% di sale	28
Analisi dei dati	29

Introduzione

Nel presente lavoro viene adoperata una tecnica particolare per la determinazione della costante dielettrica di un materiale omogeneo posto in un forno a microonde e contenuto all'interno di un recipiente cilindrico. Il contenitore funge da guida d'onda così che è possibile adoperare un modello semplificato per la propagazione delle microonde nel mezzo. Attraverso la misurazione della temperatura sulla superficie del contenitore e con un semplice modello matematico è possibile ricavare la costante dielettrica del mezzo in esame, che risulta essere una funzione della frequenza, della temperatura e della composizione chimica. La temperatura viene misurata attraverso una telecamera a raggi infrarossi, in questo modo non si ha interferenza con il campo elettromagnetico all'interno del forno.

Le prove sono condotte su acqua pura, acqua con percentuale in peso di sale del 2% e 4%. Nel primo capitolo si introduce il campo elettromagnetico e la sua interazione con i materiali, la caratterizzazione dielettrica di un materiale e le sue grandezze derivate, in particolare la profondità di penetrazione del campo. Inoltre si studia il modello di propagazione delle onde elettromagnetiche in un materiale dielettrico-dissipativo e la generazione di calore che nasce da questa propagazione.

Nel secondo capitolo si prende in esame il modello matematico utilizzato per trovare il campo di temperatura nel materiale considerato.

Nel terzo capitolo si riportano il set-up delle prove, i risultati sperimentali, il confronto con il modello analitico e le conclusioni finali.

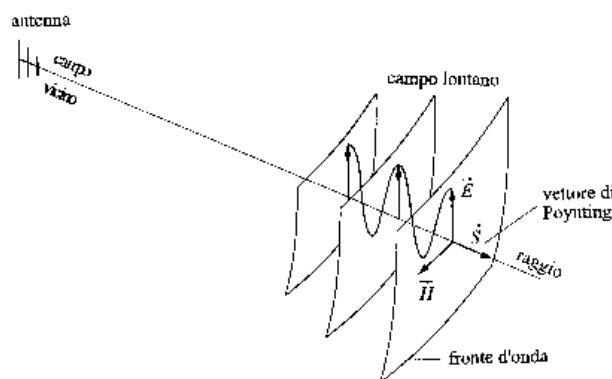
CAPITOLO I

Il campo elettromagnetico

Quando il campo elettrico e il campo magnetico variano nel tempo, nascono importanti fenomeni di interazione fra essi che non sono presenti nel caso dei campi statici. Sintetizzando i risultati delle esperienze di Faraday, possiamo dire che un campo magnetico variabile nel tempo produce un campo elettrico nelle zone ad esso circostanti. Il campo elettrico che così ne risulta ha la stessa realtà fisica e le stesse proprietà dinamiche (ossia esercita una forza sulle cariche elettriche) del campo originato da cariche elettriche. Il campo elettrico così prodotto varia con la stessa frequenza f del campo magnetico inducente e le sue linee di forza si concatenano in circuiti chiusi attorno alle linee del campo magnetico generatore .

Il campo elettrico \vec{E} ed il campo magnetico \vec{H} sono vettori perpendicolari fra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione. I versi di \vec{E} , \vec{H} sono tali da costituire, nell'ordine, una terna destrorsa (Figura). Anche se le ampiezze del campo elettrico e magnetico variano il rapporto tra i loro moduli η , noto come impedenza d'onda rimane costante. Quest' ultima si misura in Ω come la resistenza elettrica: $\eta = \frac{E}{H}$. L'impedenza d'onda dipende dalle caratteristiche elettriche e

magnetiche del mezzo in cui l'onda si propaga secondo la formula: $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$.

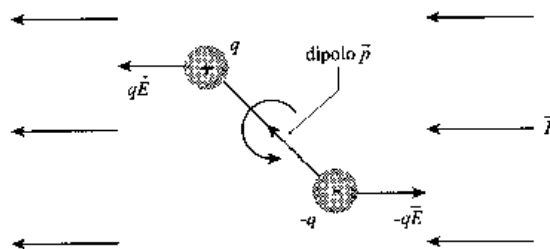


Meccanismi di interazione

I materiali, esposti ai campi EM, interagiscono con questi assorbendone energia. Il meccanismo attraverso il quale questa interazione si attua è costituito dalle forze esercitate dal campo elettrico e dal campo magnetico sulle cariche elettriche presenti nel sistema materiale. La materia può essere

considerata come un enorme aggregato di particelle portatrici di carica elettrica. Ogni molecola si presenta globalmente neutra a meno di situazioni particolari, in cui si può avere un eccesso di elettroni (ione negativo) o di protoni (ioni positivo). Elettroni e ioni, quando sono soggetti ad un campo elettrico e se sono liberi di muoversi, danno luogo ad una corrente elettrica. La conducibilità σ è il parametro che caratterizza un mezzo materiale come conduttore di elettricità: σ è tanto più grande quanti più portatori di carica sono disponibili e quanto più ciascuno di essi ha facilità di muoversi.

I dipoli possono risultare dall'applicazione di un campo elettrico, che riorganizza la distribuzione di carica a livello macroscopico(dipolo indotto), oppure possono preesistere alla applicazione del campo, come risultato delle forze che concorrono alla formazione delle molecole(dipolo permanente).I dipoli indotti scompaiono quando si annulla il campo. Le sostanze che contengono dipoli elettrici permanenti si dicono polari.In presenza di campo elettrico, i dipoli permanenti tendono a disporsi parallelamente ad esso. La forza risultante è nulla, ma a causa del diverso punto di applicazione della forza che agisce sulle cariche negative, ne risulta una coppia che tende a far ruotare il dipolo fino ad allinearlo con il campo elettrico (Figura).



Quindi l'applicazione di un campo elettrico conduce, sia nel caso della formazione di dipoli indotti che in quello di allineamento di dipoli permanenti, alla presenza all'interno del materiale di un insieme di dipoli con orientazione mediamente parallela al campo inducente. L'effetto risultante è l'apparire di un momento di dipolo \vec{P} , indotto dal campo elettrico, che tende a disporsi parallelamente al campo inducente. Dunque il vettore di polarizzazione \vec{P} è il risultato, a livello macroscopico, della presenza di dipoli. Se non è presente il campo elettrico, l'agitazione termica, disordinando casualmente la formazione e/o l'orientazione dei dipoli a livello macroscopico, fa sì che il vettore polarizzazione sia, dovunque, sostanzialmente nullo.

Quando si parla dell'interazione di un campo EM con un corpo materiale bisogna distinguere fra campo incidente e campo interno. Il campo incidente è, per definizione, quel campo che sarebbe presente nella zona di spazio di interesse in assenza del corpo materiale. Il campo interno è quello realmente presente all'interno del corpo e differisce da quello incidente in quanto esso è la somma

del campo incidente e di quello dovuto alla presenza dei dipoli. Indichiamo con \vec{D} il campo interno (noto anche come vettore induzione elettrica), definito nel seguente modo:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1)$$

Il vettore di polarizzazione \vec{P} ha intensità proporzionale al campo elettrico \vec{E} :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (3)$$

dove $\varepsilon_r = 1 + \chi$ è la costante dielettrica relativa. La quantità χ è detta suscettività elettrica del materiale ed esprime il contributo dei dipoli alla costante dielettrica ε . La costante dielettrica relativa, in generale, è un numero complesso, il motivo è legato alla presenza di perdite dovute al campo elettrico che si hanno nel materiale. Quando il campo elettrico e magnetico sono variabili nel tempo i portatori di carica libera e i dipoli, spinti dalle forze esercitate dai campi, si muovono con questi dando luogo a correnti anch'esse variabili nel tempo. Per distinguere tra i due contributi, si usa il termine di corrente di conduzione per la corrente dovuta alle cariche libere e corrente di polarizzazione per quella dovuta ai dipoli. Queste due correnti sono responsabili delle perdite che nascono all'interno del materiale.

Proprietà dielettriche dei materiali

La definizione della costante dielettrica relativa complessa può essere fatta discendere dall'equazione di Ampere-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

dove \vec{J} è la densità di corrente di cariche libere e \vec{D} è il vettore induzione elettrica.

Se facciamo le ipotesi:

- a) il materiale con cui si ha a che fare deve essere un dielettrico (eventualmente) con perdite
- b) non devono essere presenti correnti elettriche impresse
- c) si deve essere in regime armonico sinusoidale

possiamo scrivere la (4) nel seguente modo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \quad (5)$$

dove ω è la pulsazione angolare, mentre $\hat{\epsilon}$ è la costante dielettrica relativa complessa.

Dimostriamo perché, sotto le ipotesi fatte, la (4) può essere scritta nella forma (5):

la densità di corrente di cariche libere \vec{J} può essere espressa in funzione del campo elettrico \vec{E} attraverso la conducibilità (elettrica) σ :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (6)$$

Essendo $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ si ha

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (7)$$

E'opportuno trattare separatamente i casi seguenti:

- a)il materiale è senza perdite
- b)il materiale presenta perdite esclusivamente di tipo ohmico;
- c)il materiale presenta perdite esclusivamente di tipo dielettrico;
- d)il materiale presente tanto perdite ohmiche quanto dielettriche.

Materiali dielettrici senza perdite

In questo caso la conducibilità risulta nulla ($\sigma = 0$), mentre la polarizzazione è proporzionale al campo elettrico ed in fase con esso:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (8)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (9)$$

dove χ è la suscettività elettrica e $\epsilon_r = 1 + \chi$ la costante dielettrica relativa del materiale considerato. Come si vede l'equazione (7) assume la forma (5) semplicemente ponendo:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_r (= \epsilon_r - j0).$$

Materiali con perdite ohmiche

La conducibilità permette di tener conto delle perdite ohmiche, che come è noto si possono ricondurre alla interazione tra il campo elettrico e le cariche libere presenti nel materiale. La polarizzazione è ancora proporzionale ed in fase col campo elettrico. In questo caso si vede che la

(7) assume la forma (5) ponendo $\hat{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}$.

Materiali con perdite dielettriche

Le perdite dielettriche sono legate alla interazione tra il campo elettrico ed i dipoli elettrici presenti nel materiale. In presenza di perdite dielettriche, la polarizzazione non riesce a mantenersi in fase con il campo elettrico alla frequenza di lavoro; la conducibilità di tipo ohmico è nulla ($\sigma = 0$) mentre se ψ è il ritardo di fase di \vec{P} rispetto ad \vec{E} possiamo scrivere:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi e^{-j\psi} \vec{E} = \varepsilon_0 \chi (\cos \psi - j \sin \psi) \vec{E} \quad (10)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 [1 + \chi (\cos \psi - j \sin \psi)] \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon' - j \varepsilon'') \vec{E} \quad (11)$$

dove si è posto $\varepsilon' = 1 + \chi \cos \psi$ e $\varepsilon'' = \chi \sin \psi$.

Possiamo ricondurre l'equazione (7) alla (5) ponendo: $\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j \varepsilon''$.

Materiali con perdite sia dielettriche sia ohmiche

Nel caso più generale possibile, ossia considerando sia perdite ohmiche che dielettriche, se sostituiamo la (11) nella (7) otteniamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j \omega \varepsilon_0 (\varepsilon' - j \varepsilon'') \vec{E} \quad (12)$$

che può essere messa nella forma (5) se definiamo

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j \left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) = \varepsilon' - j \varepsilon''_{eff} \quad (13)$$

dove ε''_{eff} tiene conto sia delle perdite ohmiche che dielettriche.

E' opportuno osservare che, dal punto di vista sperimentale, non è di fatto possibile distinguere le perdite ohmiche da quelle dielettriche. Quello che si osserva, nel materiale dove è presente un campo elettrico \vec{E} , è una corrente con una componente in fase ed una in quadratura rispetto al campo stesso; alla prima di queste componenti risultano associate le perdite in energia che portano, tra l'altro, al riscaldamento del materiale. In definitiva, potremo riscrivere l'equazione 2) nel modo seguente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{tot} \quad (14)$$

$$\text{dove } \vec{J}_{tot} = j \omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \vec{E} \quad (15)$$

Profondità di penetrazione del campo elettrico

La costante dielettrica relativa complessa $\hat{\epsilon}$ rappresenta quelle che potremmo chiamare le proprietà dielettriche primarie di un materiale e lo caratterizza completamente dal punto di vista dielettrico. Vogliamo definire e calcolare una proprietà dielettrica derivate: la profondità di penetrazione Δ . Per definire e calcolare tale proprietà partiamo dalle equazioni che descrivono la propagazione del campo elettromagnetico in un mezzo omogeneo ed isotropo, dielettrico-dissipativo, privo di sorgenti, magneticamente trasparente e di proprietà dielettriche primarie $\hat{\epsilon}$, in regime sinusoidale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0\hat{\epsilon}\vec{E} \quad (16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \quad (17)$$

Prendendo il rotore di ambo i membri della seconda equazione e sostituendovi la prima otteniamo :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \omega^2\epsilon_0\mu_0\vec{E} = \gamma^2\vec{E} \quad (18)$$

$$\text{dove si è definito } \gamma^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0\hat{\epsilon} \quad (19)$$

Utilizzando la nota identità vettoriale per il rotore di rotore e tenendo conto dell'assenza di sorgenti (per cui la divergenza di campo elettrico è nulla) otteniamo:

$$\nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \quad (20)$$

Se consideriamo, per semplicità, un campo elettrico polarizzato in direzione z e che si propaga in direzione x : $\vec{E} = E_z(x,t)\hat{z}$ allora la relazione (20) diviene :

$$\nabla^2 E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -\gamma^2 E_z \quad (21)$$

Una possibile soluzione della (21) risulta essere:

$$E_z(x,t) = E_0 e^{j\omega t} e^{\pm j\gamma x} \quad (22)$$

In modo del tutto generale, si può rappresentare il numero complesso γ , definito dalla (19), con una espressione del tipo :

$$\gamma = \beta - j\alpha \quad (23)$$

γ è detta *costante di propagazione*. La (22) diventa:

$$E_z = E_0 e^{j(\omega t \pm \beta x)} e^{\pm \alpha x} \quad (24)$$

In base a questa soluzione possiamo definire la *lunghezza d'onda* λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (25)$$

e la *profondità di penetrazione* Δ :

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \quad (26)$$

Dalla (24) possiamo vedere che il termine $e^{\pm\alpha x}$ rappresenta un fattore di attenuazione dell'onda, poiché l'onda si propaga in un mezzo dissipativo, necessariamente l'esponenziale deve decrescere, quindi dobbiamo considerare solo il segno meno d'avanti α , che è chiamato *coefficiente di attenuazione* ed è positivo.

Dalla definizione della profondità di penetrazione il coefficiente di attenuazione risulta essere $e^{-\frac{x}{\Delta}}$, da cui si deduce che Δ è quella profondità x alla quale il campo si è attenuato di un fattore $1 - e^{-1}$, cioè si è ridotto del 67%.

$$E_z = E_o e^{j(\omega t \pm \beta x)} e^{-\frac{x}{\Delta}} \quad (27)$$

Troviamo il legame tra Δ e le altre proprietà dielettriche del materiale.

SE facciamo il quadrato della (23) otteniamo:

$$\gamma^2 = (\beta - j\alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\alpha\beta \quad (28)$$

Considerando la (19) abbiamo

$$\gamma^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon' - j\varepsilon''_{eff}) \quad (29)$$

$$\text{da cui si ricava il sistema: } \begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon' \\ 2\alpha\beta = \omega \mu_0 \sigma_1 \end{cases} \quad (30)$$

facendo comparire i parametri λ e Δ a cui siamo interessati, il sistema si trasforma nel seguente:

$$\begin{cases} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\Delta^2} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon' \\ \frac{4\pi}{\Delta\lambda} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon''_{eff} \end{cases} \quad (31)$$

Risolviendo il sistema (31) otteniamo:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega \sqrt{\frac{\epsilon'}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{(\epsilon''_{eff})^2}{\omega \epsilon_0 \epsilon'^2}} \right]}} \quad (32)$$

$$\delta = \frac{c}{\omega \sqrt{\frac{\epsilon'}{2} \left[\frac{(\epsilon''_{eff})^2}{\omega \epsilon_0 \epsilon'^2} \right]}} \quad (33)$$

dove $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ ed è la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica nel vuoto.

Potenza termica generata dalle onde elettromagnetiche

Negli esperimenti condotti i tre materiali analizzati sono tutti dielettrici-dissipativi, magneticamente trasparenti, senza generazione di energia elettromagnetica, e poichè sono contenuti in una guida d'onda (cilindrica), possiamo assumere come direzione di propagazione dell'onda l'asse del cilindro x, e considerare un solo modo di propagazione (monomodale) di tipo sinusoidale, con il campo polarizzato in direzione r (radiale), cioè possiamo modellare la propagazione del campo nei mezzi analizzati con la (27):

$$E(x, t) = E_0 e^{j(\omega t \pm \beta x)} e^{-\frac{x}{\Lambda}} \quad (34)$$

Quello che a noi interessa è trovare la potenza termica generata dal campo elettromagnetico nei materiali sotto esame.

Si dimostra che il bilancio energetico dell'onda in un volume di controllo è dato:

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \text{Re} \left(\oint_{\partial V} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{n} dS \right) \quad (35)$$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ è il vettore di Poynting e rappresenta il vettore flusso specifico di energia elettromagnetica. Il primo membro della (35) rappresenta la generazione di energia per effetto Joule nel volume di controllo nell'unità di tempo, mentre il secondo membro è il flusso netto uscente di energia elettromagnetica dal volume di controllo.

Dal teorema della divergenza possiamo scrivere

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \text{Re} \frac{1}{2} \left(\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) dV \right) \quad (36)$$

Se scriviamo la (36) in forma locale abbiamo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{Re} \frac{1}{2} (\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*)) \quad (37)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H}^* - (\nabla \times \vec{H}^*) \cdot \vec{E} \quad (38)$$

Dalla (16) e (17) sappiamo che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^* = j\omega\epsilon_0\hat{\epsilon}\vec{E}^* \quad (39)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \quad (40)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = (-j\omega\mu_0\vec{H}) \cdot \vec{H}^* - (j\omega\epsilon_0\hat{\epsilon}\vec{E}^*) \cdot \vec{E} \quad (41)$$

Dalla (13) possiamo scrivere:

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = (-j\omega\mu_0\vec{H}) \cdot \vec{H}^* - [j\omega\epsilon_0(\epsilon' - j\epsilon''_{eff})\vec{E}^*] \cdot \vec{E} \quad (42)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \omega\epsilon_0\epsilon''_{eff}\vec{E} \cdot \vec{E}^* - j(\omega\mu_0\vec{H} \cdot \vec{H}^* + \omega\epsilon_0\epsilon'\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \quad (43)$$

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = \left(E_o e^{j(\omega t \pm \beta x)} e^{-\frac{x}{\Delta}} \right) \left(E_o e^{-j(\omega t \pm \beta x)} e^{-\frac{x}{\Delta}} \right) = \left(E_o e^{-\frac{x}{\Delta}} \right)^2 \quad (44)$$

Quindi dalla (37) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \omega\epsilon_0\epsilon''_{eff} \left(E_o e^{-\frac{x}{\Delta}} \right)^2 \quad (45)$$

Poichè $\omega = 2\pi f$ possiamo scrivere:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pi f \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}'' \left(E_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} \right)^2 \quad (46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pi f \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}'' E_0^2 e^{-\frac{2x}{\Delta}} \quad (47)$$

Se indichiamo con $\dot{u}_{gen}(x)$ la generazione di calore possiamo scrivere:

$$\dot{u}_{gen}(x) = \frac{\partial u}{\partial t} = \pi f \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}'' E_0^2 e^{-\frac{2x}{\Delta}} \quad (48)$$

Se indichiamo con :

$$\dot{u}_{gen,max} = \pi f \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}'' E_0^2 \quad (49)$$

dove $\dot{u}_{gen,max}$ è la massima generazione di calore nell'unità di volume e di tempo, che è la potenza generata all'interfaccia fluido-aria.

inoltre se indichiamo:

$$\Delta_p = \frac{\Delta}{2} \quad (50)$$

dove Δ_p è la profondità di penetrazione della potenza, ossia quella distanza x alla quale la potenza si è ridotta del 67%.

Possiamo scrivere la (48) nel seguente modo:

$$\dot{u}_{gen}(x) = \dot{u}_{gen,max} e^{-\frac{x}{\Delta_p}} \quad (51)$$

La (51) è il modello della generazione di calore che utilizzeremo nel modello matematico, descritto nel capitolo 2.

CAPITOLO II

Modello analitico

Il calcolo della costante dielettrica dai profili di temperatura-tempo, richiede un modello analitico che preveda che il riscaldamento a microonde dell'esemplare, non provochi né moti convettivi, né evaporazione.

Questo equivale a considerare il problema soltanto nelle prime fasi del processo di riscaldamento, cioè si studia il problema per "*tempi piccoli*"; in questo modo si può presumere che i termini radiali dell'operatore di Laplace siano piccoli rispetto ai termini longitudinali.

Considerando che il campo elettromagnetico nell'esemplare è il risultato dell'interazione tra quello presente e quello prodotto, il termine di produzione risulta essere variabile nello spazio. In realtà il termine di produzione possiede anche una variazione temporale dovuta alla dipendenza dalla temperatura delle proprietà elettromagnetiche del materiale; questo effetto è tuttavia secondario e viene trascurato nel presente modello.

Oltre a ciò si introduce un modello semplificato per sintetizzare le caratteristiche di propagazione di un'onda nel provino e le caratteristiche del fenomeno di *interfaccia*. Il tubo che contiene il liquido è visto come una *guida d'onda* nel quale si propaga una singola onda elettromagnetica. Oltre a ciò si considera che le onde riflesse siano trascurabili.

Il fenomeno dissipativo può essere preso in considerazione attraverso l'uso di una costante di propagazione complessa, in questo modo, l'ampiezza del campo elettromagnetico risulta esponenzialmente decrescente lungo la direzione di propagazione. Questo genera un decremento esponenziale del termine di generazione (proporzionale al quadrato del campo elettromagnetico).

Per quanto detto il problema può essere convenientemente schematizzato come una *lastra piana semi-infinita* con una generazione di calore dovuta all'assorbimento dell'energia del campo elettromagnetico (per il modello del termine generazione si veda cap.I, eq.(51)), e raffreddata attraverso un trasferimento di calore *radiante-convettivo*.

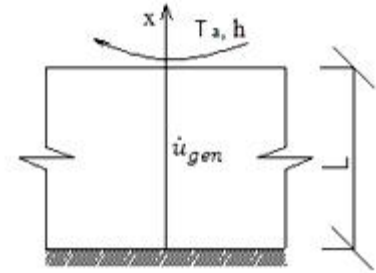
Per il problema considerato l'equazione di bilancio dell'energia e le condizioni al contorno in forma dimensionale risultano essere:

$$\frac{1}{\alpha} T_t = T_{xx} + \frac{\dot{u}_{gen}}{k} \quad (1.1)$$

$$T(x, 0) = T_i \quad (1.2)$$

$$T_x(0, t) = 0 \quad (1.3)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T(x=L) - T_a) \quad (1.4)$$



Si procede all'adimensionalizzazione delle variabili indipendenti x e t , e della variabile dipendente T .

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (2)$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_a - T_i} \quad (3)$$

$$\tau = \frac{t}{t_{rif}} \quad (4)$$

Si procede ora all'adimensionalizzazione delle equazioni:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T_{rif}}{t_{rif}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\Delta T_{rif}}{t_{rif}} \theta_\tau$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\Delta T_{rif}}{L^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\Delta T_{rif}}{L^2} \theta_{\xi\xi}$$

Sostituendo i risultati appena ottenuti nell'equazione di bilancio dell'energia si ottiene:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta T_{rif}}{t_{rif}} \theta_\tau - \frac{\Delta T_{rif}}{L^2} \theta_{\xi\xi} = \frac{\dot{u}_{gen}}{k}$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{L^2}{t_{rif}} \theta_\tau - \theta_{\xi\xi} = \frac{L^2}{\Delta T_{rif}} \frac{\dot{u}_{gen}}{k}$$

Per questioni di pulizia formale si pone: $t_{rif} = \frac{L^2}{\alpha}$, per cui si ottiene $\tau = \frac{t}{L^2} \alpha$.

In questo modo l'equazione di bilancio dell'energia diventa:

$$\theta_{\xi\xi} - \theta_\tau = -\frac{L^2}{\Delta T_{rif}} \frac{\dot{u}_{gen}}{k}$$

Essendo inoltre:

$$\dot{u}_{gen} = \dot{u}_{g,max} f(\xi) = \dot{u}_{g,max} \exp\left(-\frac{(L-x)}{\Delta_p}\right) = \dot{u}_{g,max} \exp\left(-\frac{(L-x)*L}{\Delta_p*L}\right) = \dot{u}_{g,max} \exp\left(-\frac{(1-\xi)}{\delta_p}\right)$$

$$\dot{u}_{g,max} * L * \delta_p = q_L$$

$$\Phi_L = \frac{q_L * L}{k * \Delta T_{rif}} = \frac{\dot{u}_{g,max} * L^2 * \delta_p}{k * \Delta T_{rif}}$$

risulta

$$\frac{L^2}{\Delta T_{rif}} \frac{\dot{u}_{g,max}}{k} = \frac{\Phi_L}{\delta_p}$$

e quindi l'equazione di bilancio dell'energia diventa:

$$\theta_{\xi\xi} - \theta_{\tau} = -\frac{\Phi_L}{\delta_p} \exp\left(-\frac{(1-\xi)}{\delta_p}\right) \quad (5.1)$$

Le condizioni al contorno in forma adimensionale sono invece:

$$\theta(\xi, \tau = 0) = 0 \quad (5.2)$$

$$\theta_{\xi}(\xi = 0, \tau) = 0 \quad (5.3)$$

$$\theta_{\xi}(\xi = 1, \tau) = -Bi_i[\theta(1, \tau) - 1] \quad (5.4)$$

dove $Bi = \frac{h*L}{k}$ è il numero di Biot, q_L è l'intensità radiante assorbita e $\delta_p = \frac{\Delta_p}{L}$ è la profondità di penetrazione adimensionale.

La risoluzione analitica del problema è effettuata con l'ausilio del metodo di *variazione dei parametri*, adatto alla risoluzione di equazioni differenziali lineari con qualunque tipo e numero di non omogeneità presenti.

L'idea alla base del metodo è quella di sfruttare le autofunzioni del problema omogeneo equivalente, ottenuto annullando tutte le non omogeneità presenti nel problema di partenza, comprese quelle presenti nelle condizioni al contorno.

In questo modo si ricerca la soluzione del problema originario ipotizzando che abbia la seguente forma:

$$\theta(\xi, \tau) = \sum_n A_n(\tau) X_n(\xi) \quad (6)$$

dove le $X_n(\xi)$ sono proprio le autofunzioni del problema omogeneo equivalente.

Il problema omogeneo equivalente da risolvere per ricavare le autofunzioni è il seguente:

$$\theta_{\xi\xi} - \theta_\tau = 0 \quad (7.1)$$

$$\theta(\xi, \tau = 0) = 0 \quad (7.2)$$

$$\theta_\xi(\xi = 0, \tau) = 0 \quad (7.3)$$

$$\theta_\xi(\xi = 1, \tau) = -B_i[\theta(1, \tau)] \quad (7.4)$$

Il problema (7) è risolto applicando il *metodo di separazione delle variabili*, ipotizzando quindi che la soluzione abbia la seguente forma:

$$\theta(\xi, \tau) = X(\xi)T(\tau) \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella (7.1) si ha:

$$\dot{X}T = X\dot{T}$$

da cui

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{\dot{T}}{T} = -\lambda^2$$

Siccome siamo interessati alle autofunzioni $X_n(\xi)$, risolviamo soltanto il seguente problema differenziale:

$$\ddot{X} = -\lambda^2 X \quad (9.1)$$

$$X(0) = 0 \quad (9.2)$$

$$\dot{X}(1) = -B_i X(1) \quad (9.3)$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale (9.1) è:

$$X(\xi) = A \sin(\lambda\xi) + B \cos(\lambda\xi)$$

Applicando le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda A \cos(0) - \lambda B \sin(0) && \text{da cui } A = 0 \\ -B_i B \cos\lambda &= -\lambda B \sin(\lambda) && \text{da cui } \lambda_n = \frac{B_i}{\tan(\lambda_n)} \end{aligned} \quad (10)$$

Le autofunzioni del problema omogeneo equivalente sono quindi:

$$X_n(\xi) = \cos(\lambda_n \xi) \quad (11)$$

con i λ_n dati dall'equazione caratteristica (10).

Il calcolo dei coefficienti $A_n(\tau)$ viene effettuato sfruttando l'ortogonalità delle autofunzioni. Si moltiplica primo e secondo membro della (6) per $X_n(\xi)$ e si integra il tutto tra 0 e 1.

$$\int_0^1 \theta(\xi, \tau) X_m(\xi) d\xi = \int_0^1 A_m(\tau) X_m^2(\xi) d\xi = A_m \int_0^1 \cos^2(\lambda_m \xi) d\xi = \frac{A_m}{2}$$

da cui si ha:

$$A_m(\tau) = 2 \int_0^1 \theta(\xi, \tau) X_m(\xi) d\xi \quad (12)$$

A questo punto si deriva l'espressione (12) rispetto al tempo τ e si impone che soddisfi l'equazione (5.1) che governa il problema.

$$\frac{dA_m}{d\tau} = 2 \int_0^1 \theta_\tau(\xi, \tau) X_m(\xi, \tau) d\xi = 2 \int_0^1 \theta_{\xi\xi} X_m(\xi) d\xi + 2 \int_0^1 \frac{\Phi_L}{\delta_p} \exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) X_m(\xi) d\xi$$

inoltre risolvendo per parti il primo integrale a secondo membro si ha:

$$2 \int_0^1 \theta_{\xi\xi} X_m(\xi) d\xi = 2X_m(\xi)\theta_\xi \Big|_0^1 - 2\dot{X}_m\theta \Big|_0^1 - \lambda^2 A_m(\tau) = -2B_i \cos(\lambda_m) - \lambda^2 A_m(\tau)$$

per cui alla fine si ottiene:

$$\frac{dA_m}{d\tau} + \lambda^2 A_m(\tau) = 2B_i \cos(\lambda_m) + 2 \int_0^1 \frac{\Phi_L}{\delta_p} \exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) X_m(\xi) d\xi = C_m \quad (13)$$

A questo punto si risolve l'equazione (13) corredata della condizione iniziale (5.2) che guardata attraverso la (6) diventa $\sum_m A_m(0) X_m(\xi) = 0$; ciò è vero se tutti gli $A_m(0)$ sono zero e quindi la condizione iniziale per la (13) è $A_m(0) = 0$.

La soluzione generale della (13) è somma dell'omogenea associata e della soluzione particolare. L'omogenea associata all'equazione (13) è :

$$\frac{dA_{m,o}}{d\tau} + \lambda^2 A_{m,o}(\tau) = 0$$

la sua soluzione è un'esponenziale:

$$A_{m,o}(\tau) = D \exp(-\lambda_m^2 \tau) \quad (14)$$

La soluzione generale è come detto somma della soluzione dell'omogenea associata e della soluzione particolare A_p , cioè:

$$A_m(\tau) = D \exp(-\lambda_m^2 \tau) + A_p \quad (15)$$

sostituendo la (15) nella (13) :

$$-\lambda_m^2 D \exp(-\lambda_m^2 \tau) + \lambda_m^2 D \exp(-\lambda_m^2 \tau) + \lambda_m^2 A_p = C_m \quad \text{da cui} \quad A_p = \frac{C_m}{\lambda_m^2}$$

quindi:

$$A_m(\tau) = D \exp(-\lambda_m^2 \tau) + \frac{C_m}{\lambda_m^2}$$

la costante D si ricava imponendo la condizione iniziale :

$$A_m(0) = D + \frac{C_m}{\lambda_m^2} = 0 \quad \text{da cui} \quad D = -\frac{C_m}{\lambda_m^2} = -A_p$$

in definitiva si ottiene:

$$A_m(\tau) = \frac{c_m}{\lambda_m^2} [1 - \exp(-\lambda_m^2 \tau)] \quad (16)$$

A questo punto si è in grado di scrivere la soluzione cercata $\theta(\xi, \tau)$:

$$\theta(\xi, \tau) = \sum_m \frac{c_m}{\lambda_m^2} X_m(\xi) - \sum_m \frac{c_m \exp(-\lambda_m^2 \tau)}{\lambda_m^2} X_m(\xi) \quad (17)$$

Il primo termine della (17) rappresenta la soluzione stazionaria.

Modello analitico approssimato

L'eq. (17) si può semplificare se consideriamo che nei tre casi sperimentali in esame (acqua pura, acqua con 2% e 4% in peso di sale):

- 1) il gruppo $\frac{\alpha}{L^2} \ll 1$, cioè $t_{rif} = \frac{L^2}{\alpha} \gg 1$
- 2) il coefficiente di scambio termico convettivo $h \ll 1$, quindi $Bi \ll 1$;

se consideriamo tempi brevi (t piccolo), dalla 1) possiamo affermare che:

$\tau = \frac{t}{t_{rif}} \rightarrow \tau \ll 1$, quindi possiamo sviluppare in serie di Taylor il termine esponenziale:

$$\exp(-\lambda_m^2 \tau) \approx 1 - \lambda_m^2 \tau \quad (18)$$

La (17) diventa:

$$\theta(\xi, \tau) \approx \sum_m \frac{c_m}{\lambda_m^2} X_m(\xi) - \sum_m \frac{c_m(1-\lambda_m^2 \tau)}{\lambda_m^2} X_m(\xi) \quad (19)$$

$$\theta(\xi, \tau) \approx \sum_m \frac{c_m}{\lambda_m^2} X_m(\xi) - \sum_m \frac{c_m}{\lambda_m^2} X_m(\xi) + \sum_m \frac{c_m(\lambda_m^2 \tau)}{\lambda_m^2} X_m(\xi) \quad (20)$$

$$\theta(\xi, \tau) \approx \sum_m \tau c_m X_m(\xi) \quad (21)$$

Se $Bi \rightarrow 0$ dall'eq. caratteristica (10) otteniamo che gli autovalori sono:

$$\lambda_m = m\pi \quad (22)$$

I coefficienti C_m si semplificano, poiché si annulla il termine legato a Bi :

$$C_m \approx 2 \int_0^1 \frac{\Phi_L}{\delta_p} \exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) X_m(\xi) d\xi \quad (23)$$

la (21) diventa:

$$\theta(\xi, \tau) \approx \tau \sum_m \left(2 \int_0^1 \frac{\Phi_L}{\delta_p} \exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) X_m(\xi) d\xi \right) X_m(\xi) \quad (24)$$

$$\theta(\xi, \tau) \approx \tau \frac{\Phi_L}{\delta_p} \sum_m \left(2 \int_0^1 \exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) \cos(\lambda_m \xi) d\xi \right) \cos(\lambda_m \xi) \quad (25)$$

Notiamo che a secondo membro della (25) compare lo sviluppo in serie di Fourier di $\exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right)$

$$\exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) = \sum_m \left(2 \int_0^1 \exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) \cos(\lambda_m \xi) d\xi \right) \cos(\lambda_m \xi) \quad (26)$$

quindi la temperatura adimensionale risulta essere:

$$\theta(\xi, \tau) \approx \tau \frac{\Phi_L}{\delta_p} \exp\left(-\frac{1-\xi}{\delta_p}\right) \quad (27)$$

In termini dimensionali la temperatura risulta:

$$T \approx T_i + \Delta T_{rif} \frac{L^2}{\Delta T_{rif}} \frac{\dot{u}_{g,max}}{k} \frac{\alpha}{L^2} t \exp\left(-\frac{1-x}{\Delta_p}\right) \quad (28)$$

$$\Delta T(x, t) = T - T_i \approx \frac{\dot{u}_{g,max}}{\rho c_p} t \exp\left(-\frac{1-x}{\Delta_p}\right) \quad (29)$$

La (29) è una approssimazione del campo di temperatura che vale per tempi brevi e per $Bi \rightarrow 0$, che equivale ad imporre una condizione di adiabaticità anche sulla superficie libera ($\theta_\xi(\xi = 1, \tau) = 0$).

CAPITOLO III

Setup dei dati

La fase sperimentale del presente studio è stata effettuata nel laboratorio di Trasmissione del calore con l'ausilio della strumentazione di seguito elencata:

- Forno industriale a microonde (230 V, 50 Hz, max power 900 W, 2450 MHz)
- Termocamera a raggi infrarossi
- Elaboratore elettronico
- Software di elaborazione dati

La fase sperimentale è stata suddivisa in tre parti:

- Preparazione materiali e strumentazione
- Esecuzione delle prove
- Raccolta dati ed elaborazione

Preparazione dei materiali e della strumentazione

Questa fase è stata caratterizzata dalla preparazione delle lattine di altezza 14 cm, opportunamente dipinte esternamente di nero affinché l'emissività tenda a 1 così da evitare che le riflessioni disturbino la misurazione della temperatura, e riempite fino a 1 cm dal bordo di acqua pura, acqua con 2% in peso di sale e acqua con 4% di sale rispettivamente per realizzare tre differenti prove. Per quanto riguarda la strumentazione è stata posizionata la termocamera, opportunamente schermata, in un tunnel attiguo al forno; in seguito è stato eseguito il cablaggio delle apparecchiature elettroniche in modo da permettere l'immagazzinamento dei dati. Infine prima di ogni prova è stato necessario schermare l'ingresso del forno per evitare la possibile fuoriuscita di onde.

Esecuzione delle prove

La fase di esecuzione delle prove è stata caratterizzata dal posizionamento della lattina con il materiale nel forno, da una chiusura adeguata dello stesso, dall'accensione del forno per un durata congrua e dallo spegnimento del forno.

La durata di accensione del forno è stato di circa 40s; a tal proposito è da notare che tale durata è stata scelta intenzionalmente maggiore rispetto a quella che teoricamente rappresenta il limite per l'assunzione di un modello teorico che faccia riferimento a tempi brevi.

Durante la prova è stato possibile controllare il riscaldamento del materiale attraverso un' interfaccia video e registrare un filmato relativo a tale riscaldamento.

Prima di effettuare le tre prove relativamente ai materiali prima citati, sono state effettuate delle prove per verificare il corretto funzionamento delle apparecchiature.

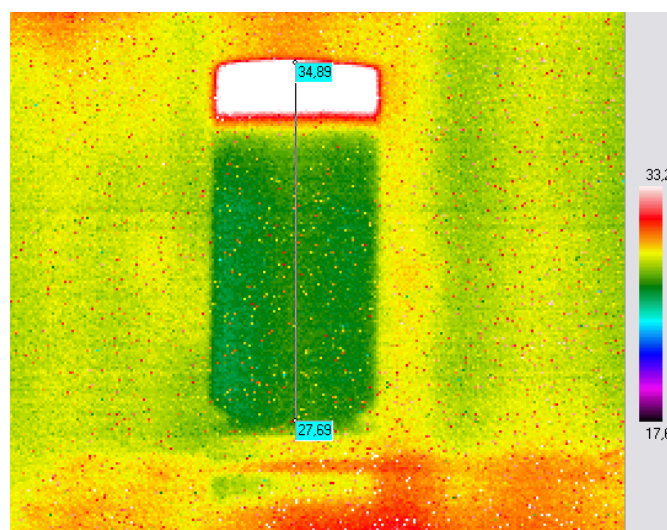
Raccolta dati ed elaborazione

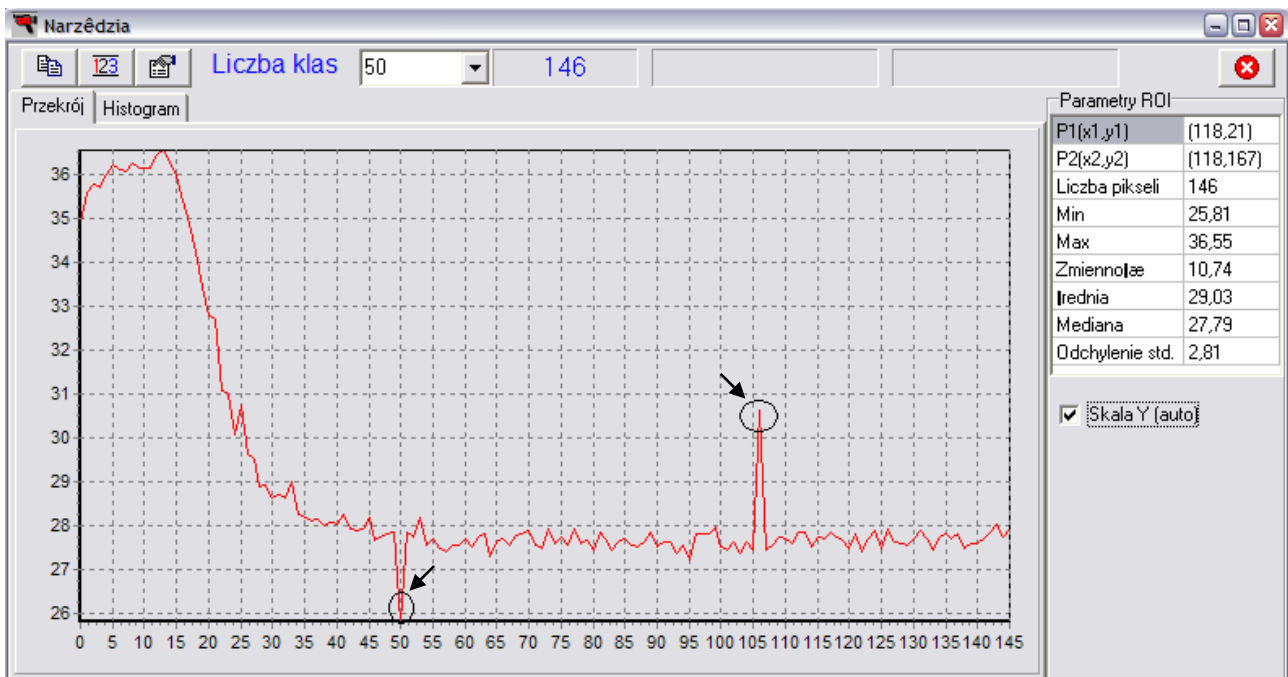
Come accennato le apparecchiature hanno permesso di immagazzinare dei filmati che in seguito sono stati elaborati con il software Thermoscope. Tale software ha convertito le immagini in dati numerici relativi alla temperatura superficiale della lattina contenente il materiale.

Da ogni filmato relativo ad una singola prova sono state estrapolate delle foto a istanti di tempo diversi. In particolare sono state prese in considerazione foto ad intervalli di tempo di 5s a partire dall'accensione del forno.

Attraverso il software è stata tracciata una linea sulla lattina ed è stato ricavato l'andamento termico della superficie.

A tal proposito si fa notare che per ipotesi la temperatura è stata ritenuta costante in direzione radiale; la temperatura rilevata dalla termocamera è quella sulla superficie del contenitore ma poiché la lattina presenta una resistenza termica conduttiva $\ll 1$ si può approssimare la temperatura superficiale esterna a quella del mezzo in esame.



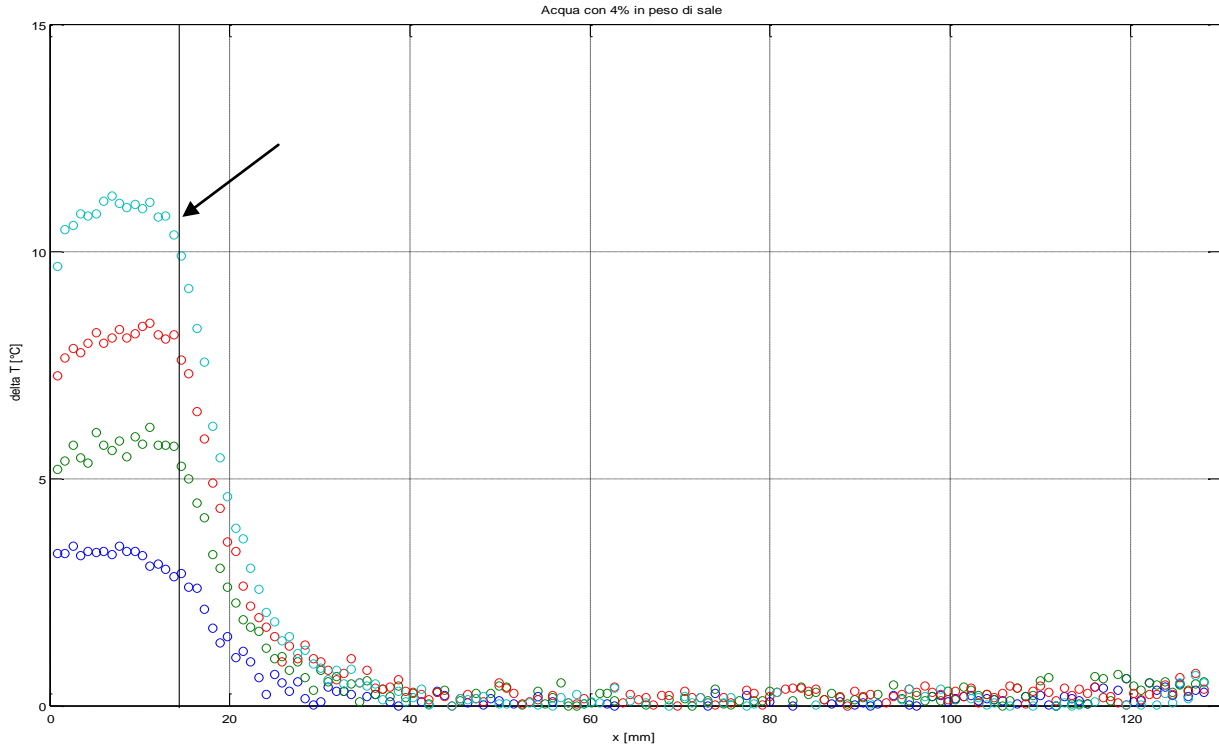


Dal grafico sono stati notati degli outlier che sono stati opportunamente eliminati per non alterare i risultati.

A valle di questa prima analisi i dati numerici sono esportati in Matlab e quindi elaborati attraverso un programma al fine di stimare i parametri di interesse.

Nel modello analitico semplificato, (vedi cap.2), si è assunto per la temperatura un andamento lineare nel tempo e esponenziale decrescente nello spazio. Si ricordi che tale modello è valido per tempi brevi e per un coefficiente di scambio termico convettivo $h \ll 1$. A tal proposito dai dati sperimentali si evidenziano due zone: la prima in prossimità della superficie superiore del mezzo che presenta un raffreddamento dovuto ad uno scambio termico convettivo con l'aria esterna, e una seconda in cui si nota effettivamente un decadimento esponenziale della temperatura come previsto nel modello.

Nella prima zona non si ha un comportamento termico fedele al modello analitico perché non è rispettata la condizione di adiabaticità ($Bi=0$), e per questo motivo tale zona non può essere presa in considerazione nella procedura di stima dei parametri.



Stima dei parametri

Partendo dal modello analitico (29, cap.2) e considerando i dati sperimentali relativi alla seconda zona si è proceduto ad una regressione lineare:

per comodità si effettua un cambiamento del sistema di riferimento nella (29): $x'=1-x$;

$$\Delta T \approx \frac{\dot{u}_{g,\max}}{\rho c_p} t e^{-\frac{x'}{\Delta_p}}$$

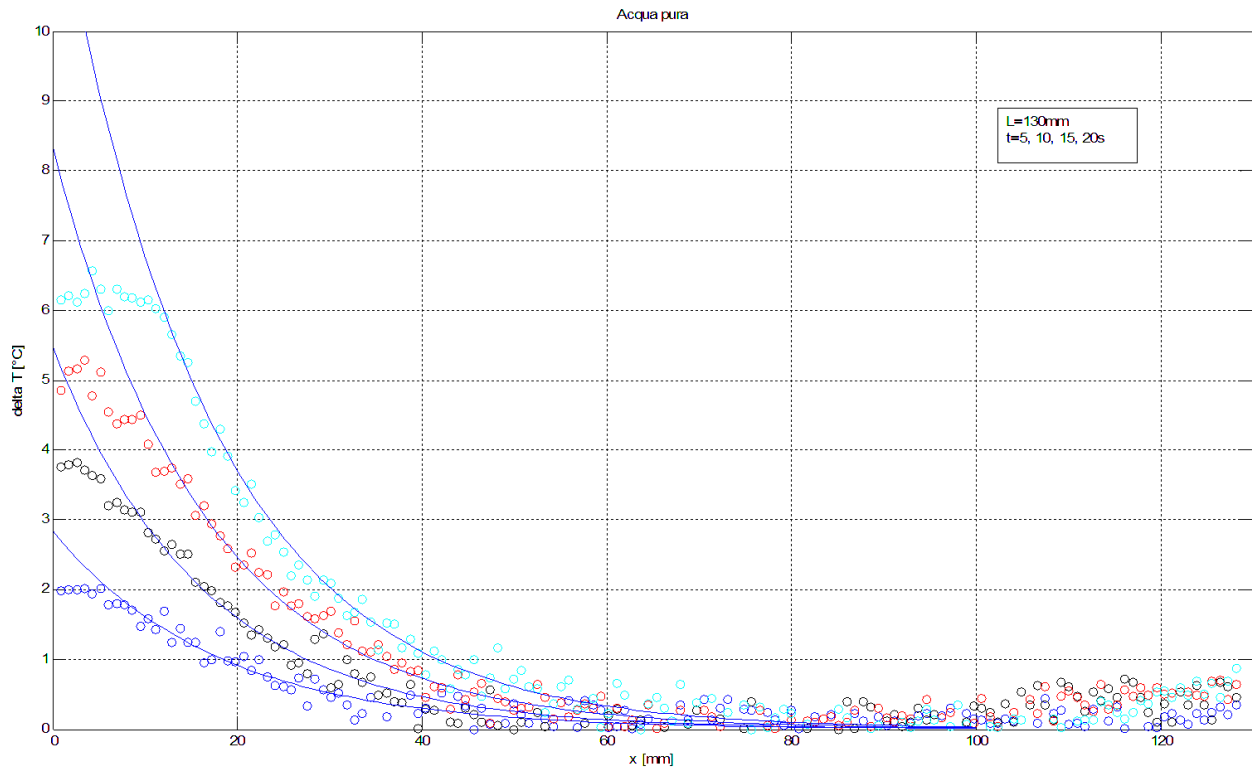
$$\ln(\Delta T) \approx \ln\left(\frac{\phi_L t}{\rho c_p}\right) - \frac{1}{\Delta_p} x'$$

quindi, considerando i dati relativi a istanti di tempo fissati, il modello si è ridotto ad una retta di equazione $y=ax'+b$. Quindi con la tecnica dei minimi quadrati sono stati stimati a e b .

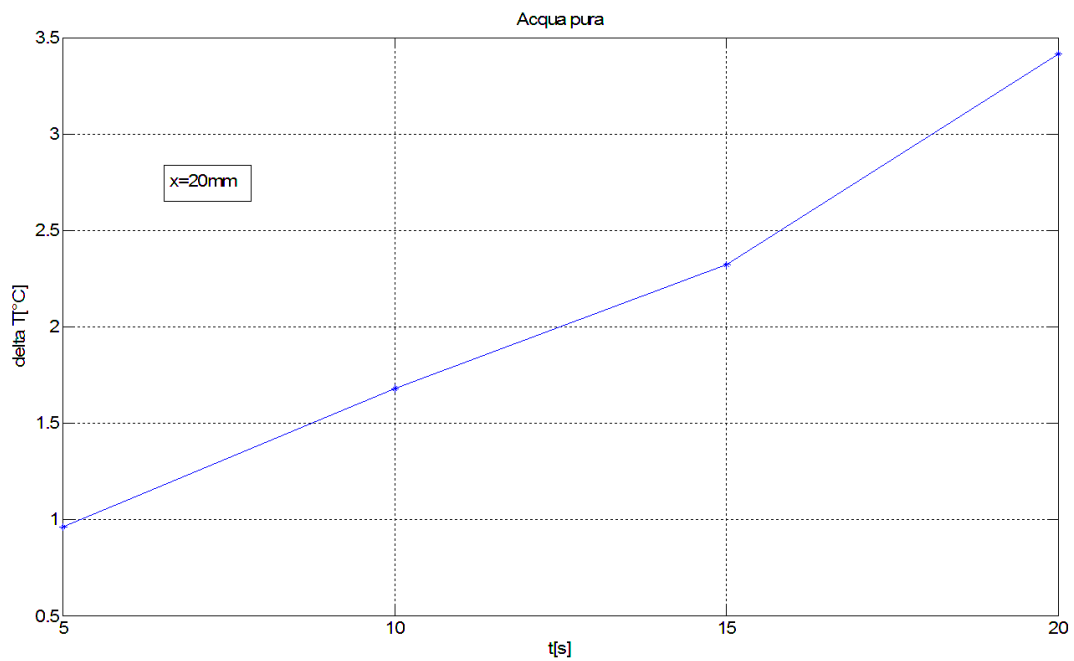
Considerando $A = \frac{\phi_L t}{\rho c_p} = b$ e $\Delta_p = -\frac{1}{a}$ si riportano di seguito le tabelle e i grafici relativi alle

tre prove.

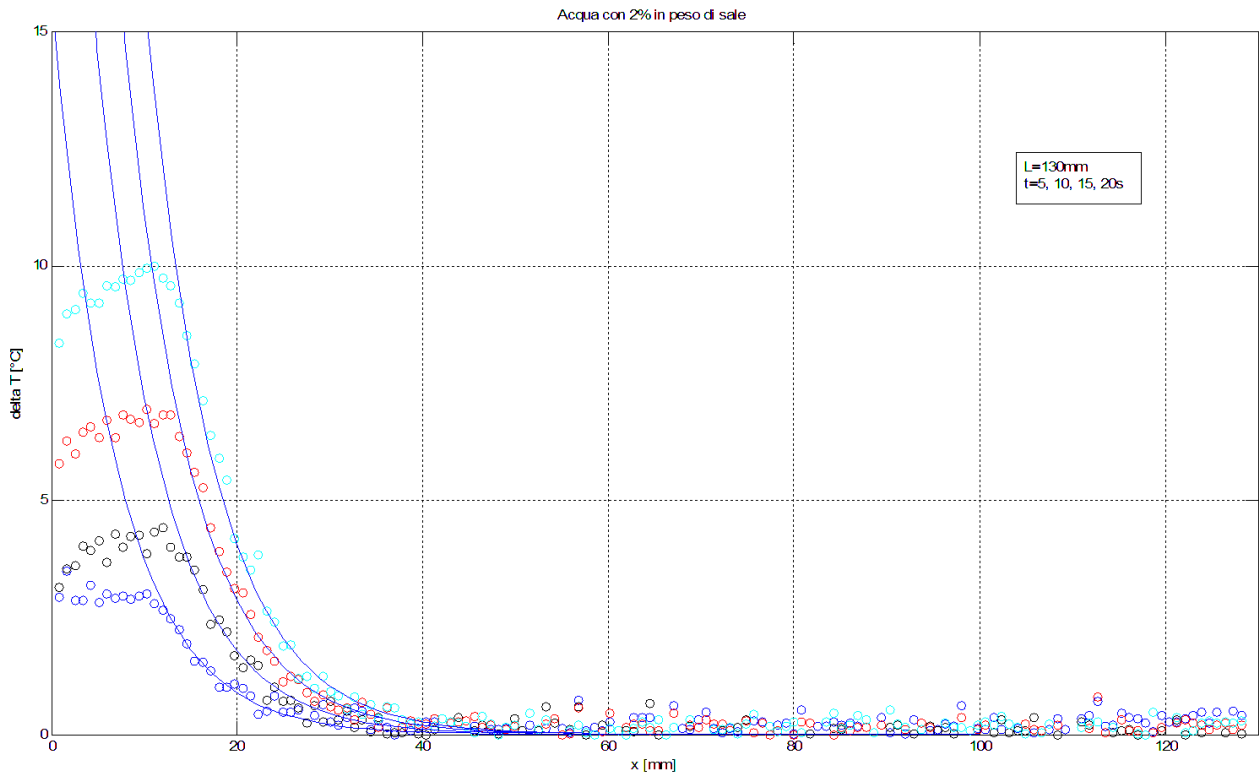
Acqua pura



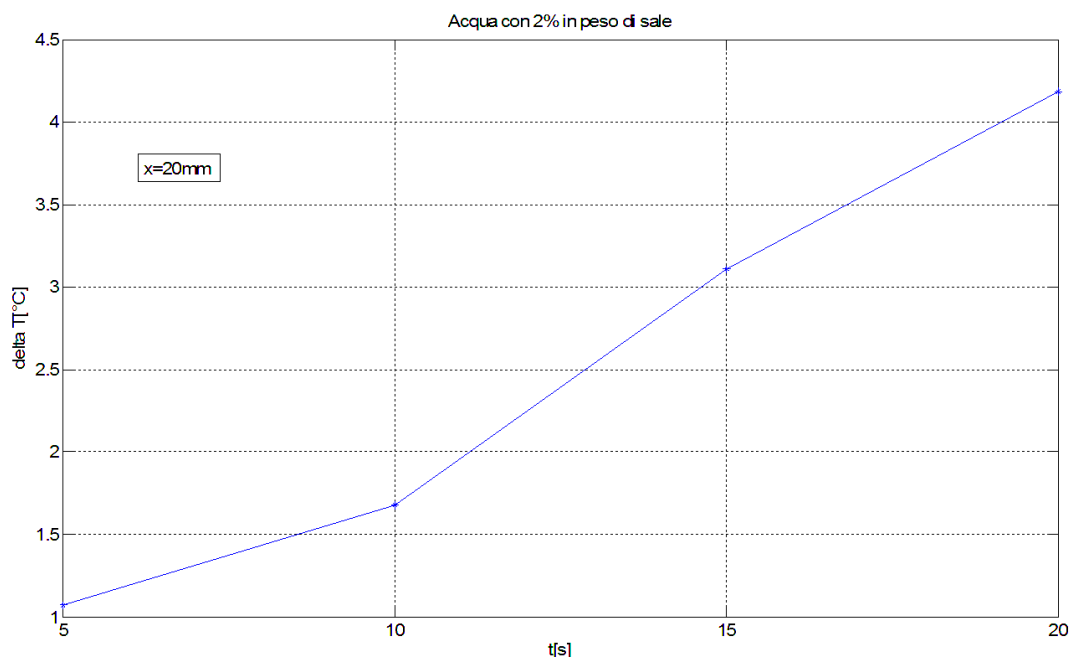
Acqua pura				
t [s]	5	10	15	20
A [°C]	2,8338	5,4567	8,3103	12,3687
Δ_p [mm]	16,1037	16,2208	16,4245	16,5813



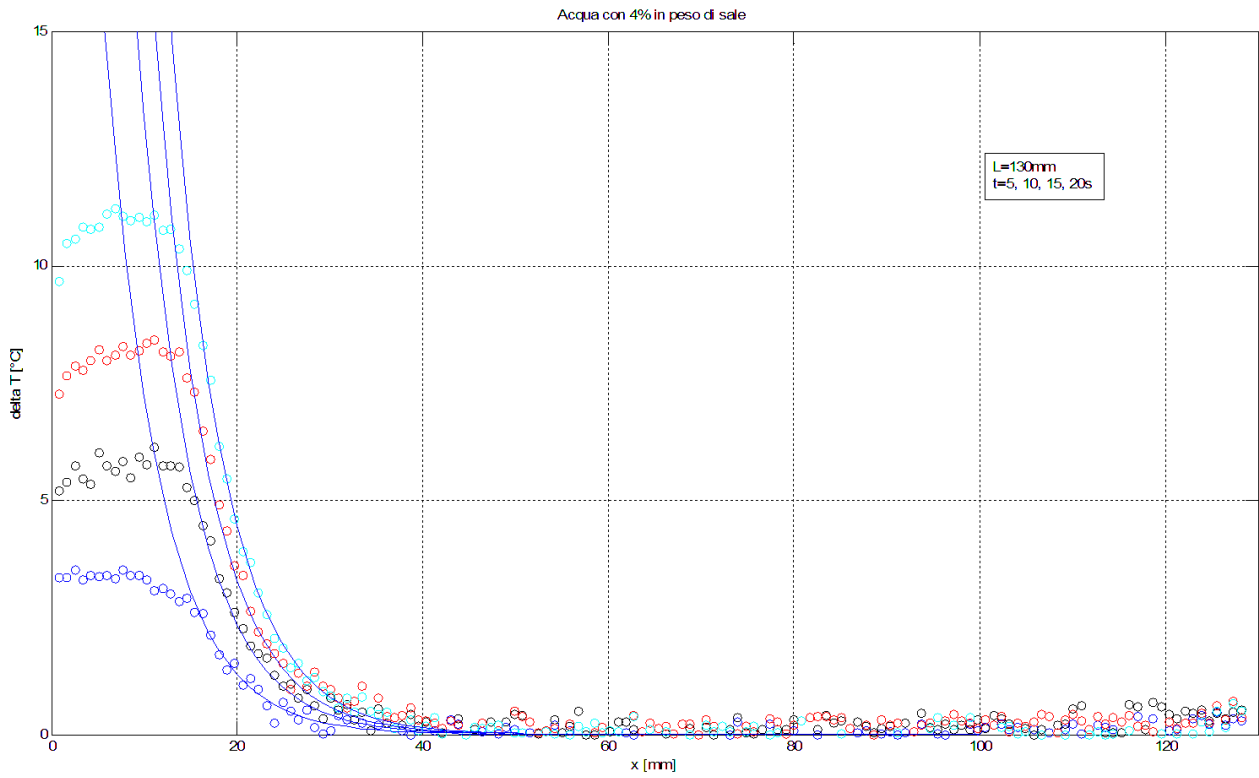
Acqua con 2% di sale



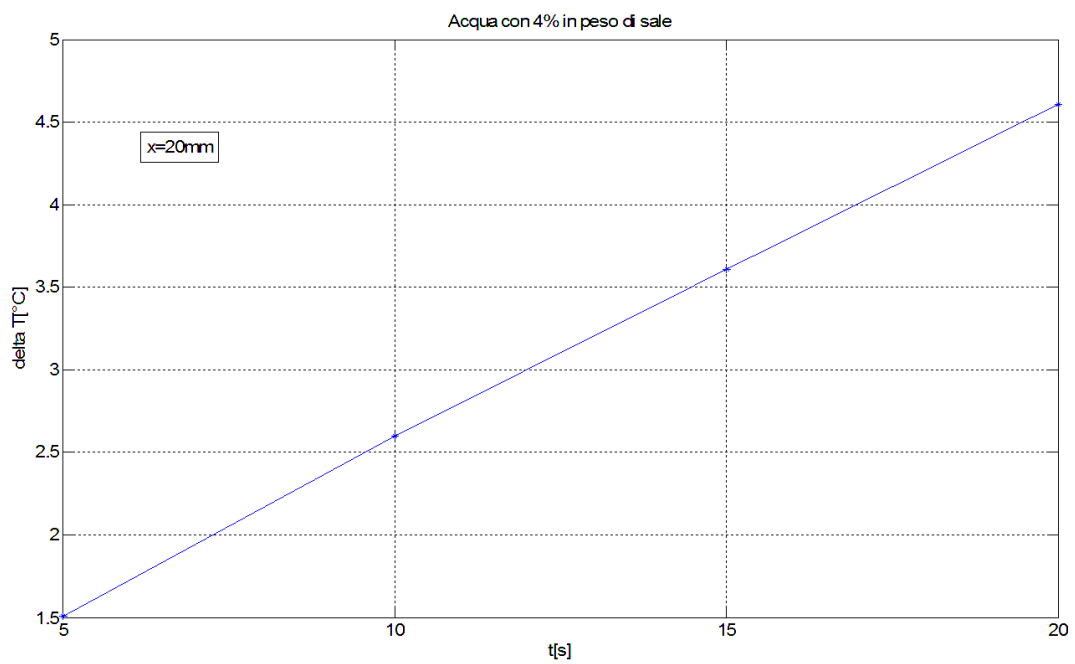
Acqua 2%sale				
t [s]	5	10	15	20
A [°C]	15,848	29,2361	43,6063	62,3364
Δ_p [mm]	6,942	7,1623	7,3535	7,3297



Acqua con 4% di sale



Acqua 4%sale				
t [s]	5	10	15	20
A [°C]	40,8017	74,345	102,965	137,709
Δ_p [mm]	5,7903	5,7974	5,8128	5,8384



Analisi dei dati

Dall'analisi dei dati si evince che in tutte le prove effettuate effettivamente l'andamento nella seconda zona è approssimata da un esponenziale decrescente. Inoltre la profondità di penetrazione aumenta con la temperatura. Le ampiezze degli esponenziali, che rappresentano la driving-force nello scambio termico convettivo con l'aria, aumenta linearmente con il tempo come previsto dal modello analitico. La prima zona, cioè quella raffreddata dall'aria, aumenta di ampiezza all'aumentare del tempo a causa probabilmente dell'aumento di temperatura all'interfaccia con l'aria. Infine si è notata una marcata diminuzione della profondità di penetrazione all'aumentare della percentuale di sale nell'acqua. Tale fenomeno è accompagnato da un aumento della temperatura media nella parte interessata dalla generazione.