

Prima Tesina

Si consideri una soletta in cemento armato dello spessore e di 30 cm, di conduttività termica 1.91 W/(mK) e diffusività termica $\alpha = 1.02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, nella quale il copriferro è di 4 cm. la soletta è protetta da uno spessore $s = 15 \text{ cm}$ di intonaco isolante, con conduttività termica $k_i = 0,15 \text{ W/(m K)}$ e capacità termica trascurabile, applicato sulla superficie inferiore. Si valuti la temperatura del ferro dopo 2 ore di esposizione della soletta ad incendio nell'ambiente sottostante, ipotizzando $T_i = 20^\circ\text{C}$, $T_f = 800^\circ\text{C}$ ed $\alpha = 400 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Si valuti inoltre la temperatura nelle stesse condizioni, ma in assenza di intonaco isolante, utilizzando i modelli di piastra a spessore infinito e di corpo seminfinito.

Abbiamo trattato i modelli di:

- Lastra con isolante con coefficiente convettivo lato incendio α_f finito
- Lastra con isolante con coefficiente convettivo lato incendio α_f infinito
- Lastra senza isolante con coefficiente convettivo lato incendio α_f finito
- Lastra senza isolante con coefficiente convettivo lato incendio α_f infinito
- Corpo seminfinito per tutti i casi sopraelencati
- Lastra con isolante con coefficiente convettivo lato incendio α_f finito e con condizione di adiabaticità al lato aria

Il problema dinamico in vece sarà :

$$\theta_{v,\tau} = \theta_{v,\xi\xi}$$

$$\theta_{v,\xi} (\xi = 0, \tau) = 0$$

$$\theta_{v,\xi} (\xi = 1, \tau) = -Bi * \theta_v (1)$$

$$\theta_v (\xi, \tau = 0) = -\theta_s (\xi) = -1$$

Essendo tale problema omogeneo posso risolverlo con il metodo delle variabili separabili, cioè da una soluzione costituita dal prodotto di due funzioni indipendenti :

$$\theta_v (\xi, \tau) = X (\xi) * T (\tau)$$

Sostituendo tale soluzione nel bilancio di energia adimensionalizzato, ricavo che :

$$\frac{X'' (\xi)}{X (\xi)} = \frac{T' (\tau)}{T (\tau)}$$

Da tale uguaglianza è evidente che i due rapporti devono essere uguali ad una costante, che deve essere presa negativa affinché la temperatura non diverga in base alla soluzione della funzione dipendente dalla τ :

$$T[\tau] := \text{Exp}[-\lambda^2 \tau];$$

$$X[\xi] := A \text{Cos}[\lambda \xi] + B \text{Sin}[\lambda \xi];$$

$$\theta_v[\xi, \tau] := X[\xi] * T[\tau];$$

A questo punto interroghiamo le nostre condizioni al contorno per determinare il valore delle costanti:

$$\partial_\xi \theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (\lambda \text{Cos}[\lambda \xi] - A \lambda \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[\xi, \tau] := e^{-\lambda^2 \tau} (B \lambda \text{Cos}[\lambda \xi] - A \lambda \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[0, \tau] == 0$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} \lambda == 0$$

Dalla prima relazione ottengo che la costante B deve essere nulla in quanto ciò deve valere per ogni τ e λ non può essere nulla, altrimenti non ci sarebbe la dipendenza dal tempo per la θ .

$$B = 0;$$

$$\theta_{v,\xi}[1, \tau] == -Bi * \theta_v[1, \tau]$$

$$-A e^{-\lambda^2 \tau} \lambda \text{Sin}[\lambda] == -0.156676 A e^{-\lambda^2 \tau} \text{Cos}[\lambda]$$

Da quest'ultima relazione si ricava che deve essere soddisfatta tale condizione:

$$\frac{\lambda}{Bi} = \text{Cot}[\lambda]$$

$$\text{Cot}[\lambda]$$

Osservando graficamente le soluzioni del problema vedo che:

$$\lambda = .$$

Nota la temperatura all'interfaccia, attraverso la legge di Fourier, determiniamo prima la temperatura sulla faccia dell'isolante esposta all'incendio, avendo indicato con t_1 la nostra incognita, quindi si calcola la temperatura a 4 cm nella parete di cemento:

$$q[t] = \frac{k_i}{L_i} (t_1 - t)$$

$$t_1 = q[t] \frac{L_i}{k_i} + t$$

La temperatura all'interfaccia incendio-isolante è:

$$798.198$$

$$\text{Erfc} \left[\frac{0.04}{2 \sqrt{a \cdot 7200}} \right] (t - T_i) + T_i$$

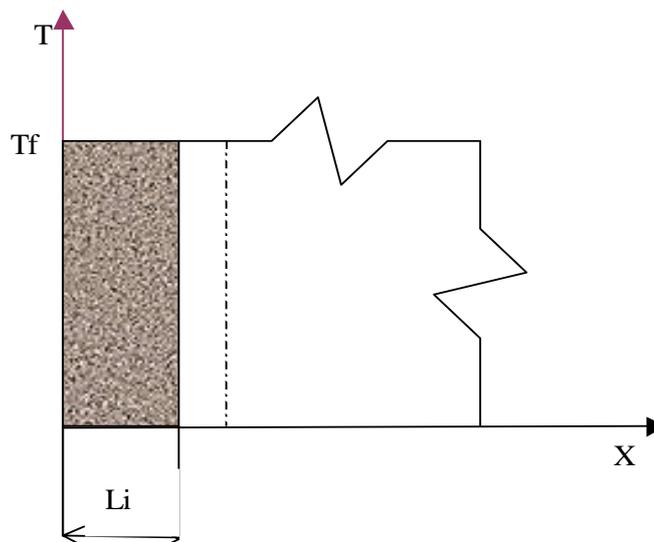
La temperatura all'interno della parete a 4 cm è:

$$62.4907$$

■ Si vuole ora calcolare invece la temperatura all'interfaccia parete-soletta, supponendo α_f "infinito"

Si procede con un bilancio di flussi. Il fatto che α_f sia infinito sta ad indicare che lo scambio convettivo è tale da considerare la temperatura sulla faccia esposta all'incendio è pari proprio alla temperatura del fluido (incendio), ci aspettiamo quindi che dai calcoli effettuati risulti quanto detto. Si pone la nostra incognita, $T[x=L_i, t]$, pari a una variabile t . Determiniamo prima la temperatura sulla faccia dell'isolante esposta all'incendio, avendo indicato con t_2 la nostra incognita, quindi si calcola la temperatura a 4 cm nella parete di cemento:

$$t = .$$



Si calcola il flusso sulla faccia esposta all'incendio in funzione di t

Lastra senza isolante con α_f infinito

Consideriamo una parete di cemento che presenta tali caratteristiche:

spessore [m]:

$$L = 0.3;$$

conducibilità termica [$\frac{W}{mK}$]

$$k = 1.91;$$

diffusività termica nel materiale [$\frac{m^2}{s}$]:

$$a = 1.02 * 10^{-6};$$

Tale parete da un lato è esposta ad un incendio.

La temperatura iniziale a cui si trova la mia parete espressa in gradi centigradi è:

$$T_i = 20;$$

La temperatura del fluido che lambisce la parete espressa in gradi centigradi è:

$$T_f = 800;$$

Introducendo il coefficiente di scambio termico convettivo [$\frac{W}{m^2K}$] e il numero adimensionale B_{ii} :

$$\alpha = 1;$$

$$B_{ii} = \alpha * L / k;$$

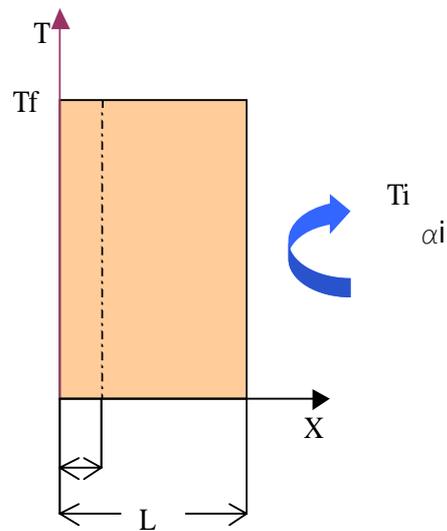
Si scrive ora l'equazione del bilancio di energia e le relative condizioni al contorno:

$$\frac{1}{\alpha} T_t = T_{xx}$$

$$\partial_x T (x = L, t) = \frac{-\alpha (T(L,t) - T_i)}{k}$$

$$T (x = 0, t) = T_f$$

$$T (x, t = 0) = T_i$$



Studieremo il caso in cui α_f , il coefficiente di scambio termico convettivo, sia "infinito" ovvero la temperatura della faccia della parete esposta all'incendio è pari alla temperatura del fluido che la lambisce:

Definito il nostro modello siamo interessati a definire dopo 2 ore di esposizione ad incendio la temperatura che raggiungerà del ferro nella soletta posto ad una distanza di 4 cm nella parete.

Adimensionalizzando il problema in questo modo:

$$\tau = \frac{t \cdot a}{L^2}$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_f - T_i}$$

si ha:

$$\theta_\tau = \theta_{\xi\xi}$$

$$\theta(0, \tau) = 1$$

$$\theta_\xi(1, \tau) = -B_{i,i} * \theta(1, \tau)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0$$

Tale problema presentandosi lineare ma non omogeneo ammette la soluzione attraverso il metodo delle soluzioni parziali, cioè considero la soluzione di $\theta(\xi, \tau)$ costituita da una soluzione stazionaria ed una variabile :

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_s(\xi) + \theta_v(\xi, \tau).$$

Sostituendo nel mio modello otterrò due sottoproblemi da risolvere, spostando la non omogeneità nel problema stazionario :

$$\theta_{s,\xi\xi} = 0$$

$$\theta_{s,\xi}(1) = -B_{ii} \theta_s(1)$$

$$\theta_s(0) = 1$$

tale problema ammette come soluzione :

$$\theta_s(\xi) = c1 * \xi + c2$$

$$\theta_s[\xi_] = \theta_s[\xi] /.$$

$$\text{Flatten}[\text{Simplify}[\text{DSolve}[\{\theta_s''[\xi] == 0, \theta_s'[1] == -B_{ii} \theta_s[1], \theta_s[0] == 1\}, \theta_s[\xi], \xi]]]$$

$$1. - 0.135747 \xi$$

$$\theta_s[\xi]$$

$$1. - 0.135747 \xi$$

Il problema dinamico in vece sarà :

$$\theta_{v,\tau} = \theta_{v,\xi\xi}$$

$$\theta_v(0, \tau) = 0$$

$$\theta_{v,\xi}(1, \tau) = -B_{ii} * \theta_v(1, \tau)$$

$$\theta_v(\xi, \tau = 0) = -\theta_s(\xi) = -(c1 * \xi + c2)$$

Essendo tale problema omogeneo posso risolverlo con il metodo della separazione delle variabili, cioè da una soluzione costituita dal prodotto di due funzioni indipendenti :

$$\theta_v(\xi, \tau) = X(\xi) * T(\tau)$$

Sostituendo tale soluzione nel bilancio di energia adimensionalizzato, ricavo che :

$$\frac{X''(\xi)}{X(\xi)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = -\lambda^2$$

Da tale uguaglianza è evidente che i due rapporti devono essere uguali ad una costante, che deve essere presa negativa affinché la temperatura non diverga in base alla soluzione della funzione dipendente dalla τ :

$$T[\tau_] := \text{Exp}[-\lambda^2 \tau];$$

$$X[\xi_] = B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi];$$

$$\theta_v[\xi_, \tau_] := X[\xi] * T[\tau];$$

A questo punto interroghiamo le nostre condizioni al contorno per determinare il valore delle costanti:

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$T[\tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau}$$

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \cos[\lambda \xi] + A \sin[\lambda \xi])$$

$$\partial_\xi \theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \cos[\lambda \xi] - B \lambda \sin[\lambda \xi])$$

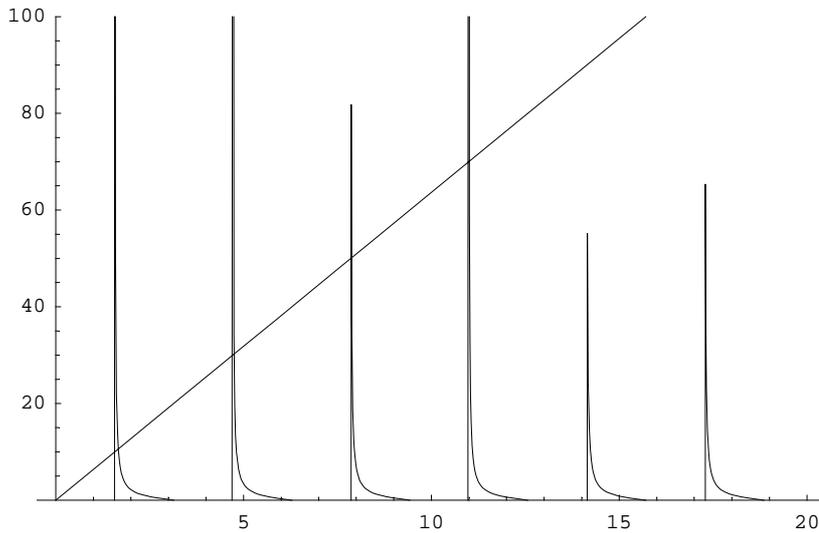
$$\theta_{v,\xi}[\xi_-, \tau_-] := E^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \cos[\lambda \xi] - B \lambda \sin[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[0, \tau] = B_{ii} * \theta_v[0, \tau]$$

$$A e^{-\lambda^2 \tau} \lambda = 0.157068 B e^{-\lambda^2 \tau}$$

Dalla condizione del primo tipo sulla parete esposta all'incendio otteniamo che la costante B deve essere nulla mentre dalla condizione del terzo tipo sul lato ove non è presente l'incendio otteniamo che bisogna determinare i λ_n . Si "plottano" dapprima le soluzioni del problema graficamente:

```
Plot[{ {  $\frac{\lambda}{B_{ii}}$ , -Tan[ $\lambda$ ] }, { $\lambda$ , 0, 20}, PlotRange -> {0, 100} ]
```



- Graphics -

Volendo valutare il valore preciso delle soluzioni abbiamo trovato le prime quattro soluzioni per via numerica e le successive si discostano le une dalle altre con una periodicità di π :

I valori delle λ_n sono quindi:

```

λ = x /. Table [FindRoot[  $\frac{x}{B_{ii}} == -\text{Tan}[x]$ , {x, i * π + π / 2}, MaxIterations → 30], {i, 20}]

{1.66486, 4.71239, 7.85398, 10.9956, 14.1372, 17.2788, 20.4204,
 23.5619, 26.7035, 29.8451, 32.9867, 36.1283, 39.2699, 42.4115,
 45.5531, 48.6947, 51.8363, 54.9779, 58.1195, 61.2611, 64.4026}

```

Sfruttando a questo punto la condizione iniziale:

$$\theta_v[\xi, 0] == -\theta_s[\xi];$$

Dovendo essere A una costante si sfruttano le infinite soluzioni di λ, infatti essendo il problema lineare è possibile vedere come soluzione una combinazione delle infinite soluzioni:

```

θ_s [ξ]
1. - 0.135747 ξ
x[ξ_] := A_n (Sin[λ ξ]);

```

"n" parte da 0 ma non significa che è λ=0 ma solo il primo valore calcolato di λ che è 1.66486:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (\text{Sin}[\lambda[n] \xi]) == -\theta_s[\xi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{Sin}[\lambda[n] \xi] == -1. + 0.135747 \xi$$

sfruttando l'ortogonalità delle autofunzioni X[ξ] e considerando una funzione peso unitaria si può moltiplicare la condizione iniziale per una generica auto funzione X_m(ξ):

$$X_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_m(\xi) X_n(\xi) T(0)$$

Si può quindi procedere all'integrazione tra 0 e 1 che consente di eliminare tutti i termini eccetto l'm-esimo

$$\int_0^1 X_m(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^1 X_m(\xi) X_n(\xi) d\xi$$

e considerando che nel nostro caso particolare X_m(ξ)=Sin[λ[m] ξ] si ricava che il valore delle n costanti A_n

$$A = - \frac{\int_0^1 \theta_s[\xi] * (\text{Sin}[x \xi]) d\xi}{\int_0^1 (\text{Sin}[x \xi])^2 d\xi}$$

$$= - \frac{\frac{1}{x} - \frac{0.864253 \text{Cos}[x]}{x} - \frac{0.135747 \text{Sin}[x]}{x^2}}{\frac{1}{2} - \frac{\text{Sin}[2x]}{4x}}$$

$$A = \text{Together}[A]$$

$$= - \frac{4 (1. x - 0.864253 x \text{Cos}[x] - 0.135747 \text{Sin}[x])}{x (2 x - \text{Sin}[2 x])}$$

Ricordando i valori delle λ_n

$\mathbf{x} = \lambda$

```
{1.66486, 4.71239, 7.85398, 10.9956, 14.1372, 17.2788, 20.4204,
23.5619, 26.7035, 29.8451, 32.9867, 36.1283, 39.2699, 42.4115,
45.5531, 48.6947, 51.8363, 54.9779, 58.1195, 61.2611, 64.4026}
```

otteniamo i valori delle A_n :

A

```
{-1.13742, -0.436639, -0.250247, -0.184137, -0.140113, -0.116658, -0.0972904,
-0.0853717, -0.0745157, -0.0673174, -0.0603809, -0.0555662, -0.0507535, -0.047308,
-0.043774, -0.0411867, -0.038482, -0.0364681, -0.0343315, -0.0327195, -0.0309892}
```

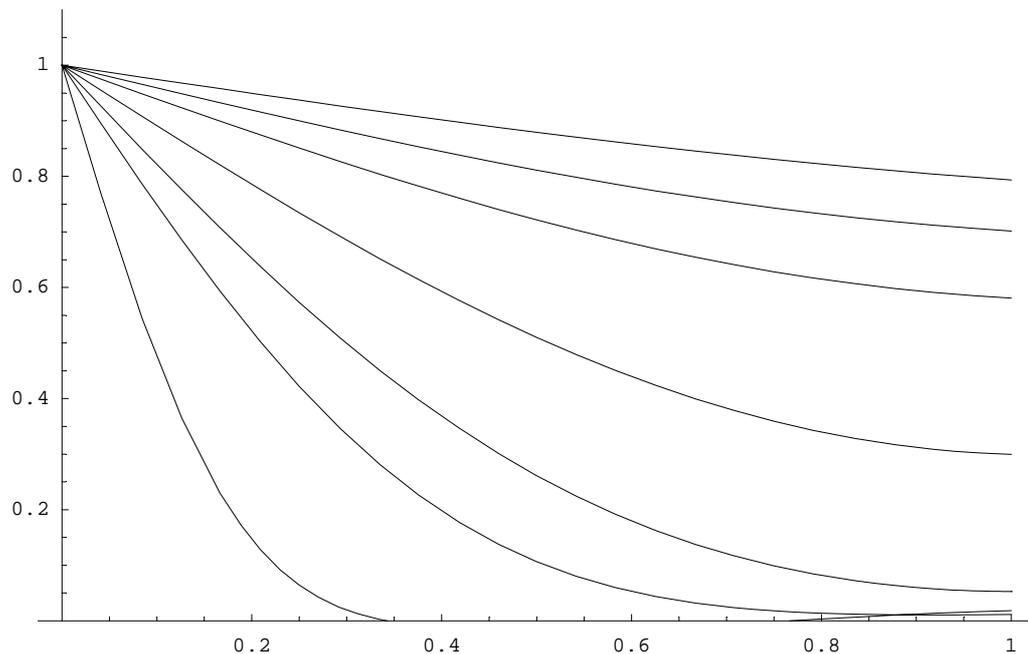
Determinate le soluzioni per i due problemi possiamo scrivere:

$$\theta[\xi_-, \tau_-] := \theta_s[\xi] + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Exp}[-(\lambda[[n]])^2 * \tau] * \mathbf{A}[[n]] * (\text{Sin}[\lambda[[n]] \xi])$$

Considerando 21 termini nella sommatoria è possibile plottare il profilo nella lastra

$$\theta[\xi_-, \tau_-] := \theta_s[\xi] + \sum_{n=1}^{21} \text{Exp}[-(\lambda[[n]])^2 * \tau] * \mathbf{A}[[n]] * (\text{Sin}[\lambda[[n]] \xi])$$

```
Plot[{θ[ξ, 0.01], θ[ξ, 0.05], θ[ξ, 0.1], θ[ξ, 0.25], θ[ξ, 0.5], θ[ξ, 0.7], θ[ξ, 1]},
{ξ, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1.1}]
```



- Graphics -

Abbiamo considerato quindici termini della sommatoria ma per il nostro caso sono superflui infatti già per $\tau=0.01$ e $\tau=0.001$ il 15° termine ha rispettivamente peso

A questo punto è possibile valutare il valore della temperatura del ferro nel cemento armato:

La posizione del ferro adimensionalizzata è:

0.04 / 0.3

0.133333

Il tempo adimensionalizzato è:

$$\frac{2 * 3600 * a}{L^2}$$

0.0816

$$T_{ferro} = T_i + \theta[0.133333, 0.0816] (T_f - T_i)$$

596.292

Lastra senza isolante con α_f finito

spessore [m]:

$$L = 0.3;$$

conducibilità termica [$\frac{W}{mK}$]

$$k = 1.91;$$

diffusività termica nel materiale [$\frac{m^2}{s}$]:

$$a = 1.02 * 10^{-6};$$

Tale parete da un lato è ricoperta da intonaco, e su tale lato è esposta ad un incendio, dall'altro la faccia è adiabatica .
La temperatura iniziale a cui si trova la mia parete e quindi anche l'intonaco, espressa in gradi centigradi è:

$$T_i = 20;$$

L'intonaco presenta una diffusività termica trascurabile invece:

conducibilità termica [$\frac{W}{mK}$]:

$$k = 1.91;$$

spessore [m]:

$$L=0.15;$$

La temperatura del fluido che lambisce l'intonaco espressa in gradi centigradi è:

$$T_f = 800;$$

il coefficiente di scambio termico convettivo [$\frac{W}{m^2 K}$]:

$$\alpha_f = 400;$$

$$\alpha_i = 1;$$

$$B_{if} = \alpha_f * L / k;$$

$$B_{ii} = \alpha_i * L / k;$$

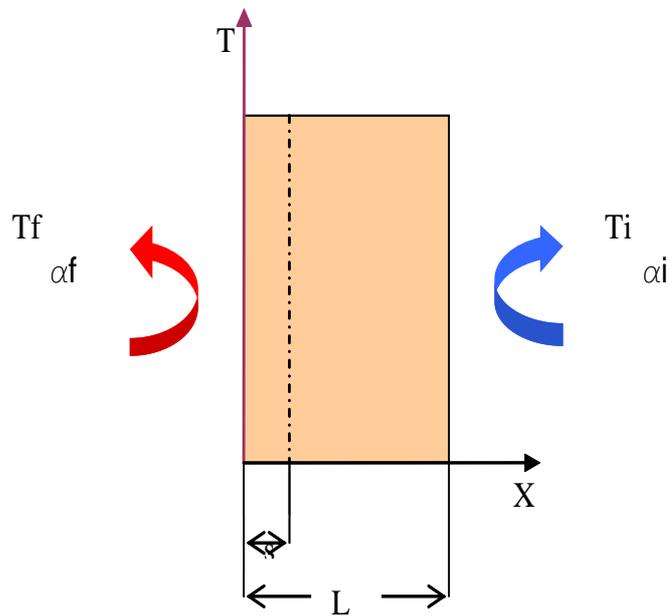
Il problema in dimensionale si

$$\frac{1}{\alpha} T_t = T_{xx}$$

$$-k \partial_x T (x = 0, t) = -\alpha_f (T (x = 0, t) - T_f)$$

$$-k \partial_x T (x = L, t) = -\alpha_i (T_i - T (x = L, t))$$

$$T (x, t = 0) = T_i$$



Definito il nostro modello siamo interessati a definire dopo 2 ore di esposizione ad incendio che temperatura raggiungerà del ferro nella soletta posto ad una distanza di 4cm dall'intonaco.

Avendo resistenza termica trascurabile il ferro, possiamo semplicemente valutare il valore della temperatura in quel punto.

Adimensionalizzando il problema in questo modo:

$$\tau = \frac{t \cdot a}{L^2}$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_f - T_i}$$

si ha:

$$\theta_\tau = \theta_{\xi\xi}$$

$$\theta_\xi(1, \tau) = -B_{ii} * \theta(1, \tau)$$

$$\theta_\xi(0, \tau) = B_{if} * (\theta(0, \tau) - 1)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0$$

Tale problema presentandosi lineare ma non omogeneo ammette la soluzione attraverso il metodo delle soluzioni parziali, cioè considero la soluzione di $\theta(\xi, \tau)$ costituita da una soluzione stazionaria ed una variabile :

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_s(\xi) + \theta_v(\xi, \tau).$$

Sostituendo nel mio modello otterrò due sottoproblemi da risolvere, spostando la non omogeneità nel problema stazionario :

$$\theta_{s,\xi\xi} = 0$$

$$\theta_{s,\xi}(1) = -B_{ii} \theta_s(1)$$

$$\theta_{s,\xi}(0) = B_{if} * (\theta_s(0) - 1)$$

tale problema ammette come soluzione :

$$\theta_s(\xi) = c1 * \xi + c2$$

```
Simplify[DSolve[{ $\theta_s''[\xi] == 0$ ,  $\theta_s'[1] == -B_{ii} \theta_s[1]$ ,  $\theta_s'[0] == B_{if} (\theta_s[0] - 1)$ },  $\theta_s[\xi]$ ,  $\xi$ ]
```

```
{ $\{\theta_s[\xi] \rightarrow 0.997687 - 0.0726471 \xi\}$ }
```

$$c1 = \frac{-B_{if} * B_{ii}}{B_{ii} * B_{if} + B_{if} + B_{ii}}$$

$$c2 = \frac{B_{if} * B_{ii} + B_{if}}{B_{ii} * B_{if} + B_{if} + B_{ii}}$$

$$-0.0726471$$

$$0.997687$$

$$\theta_s[\xi_] := c1 * \xi + c2$$

Il problema dinamico in vece sarà :

$$\theta_{v,\tau} = \theta_{v,\xi\xi}$$

$$\theta_{v,\xi}(0, \tau) = B_{if} \theta_v(0, \tau)$$

$$\theta_{v,\xi}(1, \tau) = -B_{ii} * \theta_v(1, \tau)$$

e parte va considerata la condizione di ACCOPPIAMENTO tra problema dinamico e stazionario, che deriva dalla condizione iniziale :

$$\theta_v(\xi, \tau = 0) = -\theta_s(\xi) = -(c1 * \xi + c2)$$

Essendo tale problema omogeneo posso risolverlo con il metodo delle variabili separabili, cioè da una soluzione costituita dal prodotto di due funzioni indipendenti :

$$\theta_v(\xi, \tau) = X(\xi) * T(\tau)$$

Sostituendo tale soluzione nel bilancio di energia adimensionalizzato, ricavo che :

$$\frac{X''(\xi)}{X(\xi)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = -\lambda^2$$

Da tale uguaglianza è evidente che i due rapporti devono essere uguali ad una costante, che deve essere presa negativa affinché la temperatura non diverga in base alla soluzione della funzione dipendente dalla τ :

$$T[\tau_] := \text{Exp}[-\lambda^2 \tau];$$

$$X[\xi_] = B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi];$$

$$\theta_v[\xi_, \tau_] := X[\xi] * T[\tau];$$

A questo punto interroghiamo le nostre condizioni al contorno per determinare il valore delle costanti:

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \cos[\lambda \xi] + A \sin[\lambda \xi])$$

$$T[\tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau}$$

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \cos[\lambda \xi] + A \sin[\lambda \xi])$$

$$\partial_\xi \theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \cos[\lambda \xi] - B \lambda \sin[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[\xi_-, \tau_-] := e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \cos[\lambda \xi] - B \lambda \sin[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[0, \tau] = B_{if} * \theta_v[0, \tau]$$

$$A e^{-\lambda^2 \tau} \lambda = 31.4136 B e^{-\lambda^2 \tau}$$

dall'applicazione delle condizioni al contorno si può notare che sopravvivono entrambe le costanti A e B e ne scriviamo una in dipendenza dall'altra

$$A = \frac{B_{if} B}{\lambda};$$

$$\theta_{v,\xi}[1, \tau] = -B_{ii} * \theta_v[1, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (31.4136 B \cos[\lambda] - B \lambda \sin[\lambda]) = -0.078534 e^{-\lambda^2 \tau} \left(B \cos[\lambda] + \frac{31.4136 B \sin[\lambda]}{\lambda} \right)$$

$$A$$

$$\frac{31.4136 B}{\lambda}$$

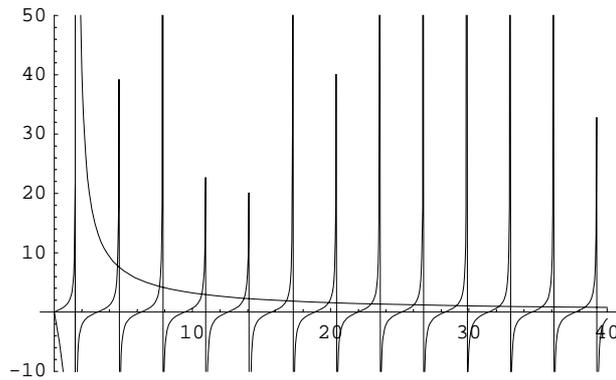
Da quest'ultima relazione si ricava che deve essere soddisfatta tale condizione:

$$B_{if} \cos[\lambda] - \lambda \sin[\lambda] + \frac{B_{if} B_{ii}}{\lambda} * \sin[\lambda] + B_{ii} \cos[\lambda] = 0$$

$$31.4921 \cos[\lambda] + \frac{2.46704 \sin[\lambda]}{\lambda} - \lambda \sin[\lambda] = 0$$

Osservando graficamente le soluzioni del problema vedo che:

```
Plot[{{ $\frac{\lambda * (B_{if} + B_{ii})}{\lambda^2 - B_{if} B_{ii}}$ , Tan[ $\lambda$ ]}, { $\lambda$ , 0, 40}, PlotRange -> {-10, 50}]
```



- Graphics -

Volendo valutare il valore preciso delle soluzioni, otteniamo:

```
 $\lambda = \mathbf{x} / . \mathbf{Table} [$   

 $\mathbf{FindRoot} [ \frac{\mathbf{x} * (B_{if} + B_{ii})}{\mathbf{x}^2 - B_{if} B_{ii}} == \mathbf{Tan}[\mathbf{x}], \{ \mathbf{x}, i * \pi - 1.577 \}, \mathbf{MaxIterations} \rightarrow 30 ], \{ i, 16 \} ]$   

{4.00294  $\times 10^{-12}$ , 4.5846, 7.62612, 10.6753, 13.7308, 16.7925, 19.8605, 22.9347,  

26.0149, 29.1006, 32.1915, 35.2871, 38.387, 41.4906, 44.5977, 47.7078}  

 $\lambda = \{ 1.64012, 4.584597382795978^{\wedge}$ ,  $7.62612167446692^{\wedge}$ ,  $10.675343049861459^{\wedge}$ ,  

 $13.730813825239883^{\wedge}$ ,  $16.79252289081319^{\wedge}$ ,  $19.860527271390858^{\wedge}$ ,  $22.93473330723884^{\wedge}$ ,  

 $26.014890434929708^{\wedge}$ ,  $29.100634194828984^{\wedge}$ ,  $32.191534406517206^{\wedge}$ ,  $35.28713492765618^{\wedge}$ ,  

 $38.386982102247885^{\wedge}$ ,  $41.49064299582897^{\wedge}$ ,  $44.597715723512174^{\wedge}$ ,  $47.70783419992011^{\wedge}$  }  

{1.64012, 4.5846, 7.62612, 10.6753, 13.7308, 16.7925, 19.8605, 22.9347,  

26.0149, 29.1006, 32.1915, 35.2871, 38.387, 41.4906, 44.5977, 47.7078}
```

Imponendo l'ultima condizione si ha:

$$\theta_v[\xi, 0] == -\theta_s[\xi];$$

Dovendo essere A una costante si sfruttano le infinite soluzioni di λ , infatti essendo il problema lineare è possibile vedere come soluzione una combinazione delle infinite soluzioni:

$$\theta_s[\xi]$$

$$0.997687 - 0.0726471 \xi$$

$$\mathbf{x}[\xi_{-}] := B_n \left(\frac{B_{if}}{\lambda} * \mathbf{Sin}[\lambda \xi] + \mathbf{Cos}[\lambda \xi] \right);$$

"n" parte da 0 ma non significa che è $\lambda=0$ ma solo il primo valore calcolato di λ che è 1.64012

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{B_{if}}{\lambda[n]} * \mathbf{Sin}[\lambda[n] \xi] + \mathbf{Cos}[\lambda[n] \xi] \right) == -\theta_s[\xi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{B_{if} \mathbf{Sin}[\lambda[n] \xi]}{\lambda[n]} + \mathbf{Cos}[\lambda[n] \xi] \right) == -0.997844 + 0.135454 \xi$$

sfruttando l'ortogonalità delle autofunzioni $X[\xi]$, si ricava che:

$$B = - \frac{\int_0^1 \theta_s[\xi] * \left(\frac{B_{if}}{x} * \sin[x \xi] + \cos[x \xi] \right) d\xi}{\int_0^1 \left(\frac{B_{if}}{x} * \sin[x \xi] + \cos[x \xi] \right)^2 d\xi}$$

$$= \frac{\frac{31.4136}{x^2} - \frac{29.1315 \cos[x]}{x^2} - \frac{0.0726471 (31.4136 - 12.7333 x^2) \sin[x]}{x^3}}{0.5 + \frac{509.114}{x^2} - \frac{15.7068 \cos[2x]}{x^2} - \frac{246.704 \sin[2x]}{x^3} + \frac{0.25 \sin[2x]}{x}}$$

B = Together[B]

$$\frac{-31.4136 x + 29.1315 x \cos[x] + 2.28211 \sin[x] - 0.92504 x^2 \sin[x]}{509.114 x + 0.5 x^3 - 15.7068 x \cos[2x] - 246.704 \sin[2x] + 0.25 x^2 \sin[2x]}$$

x = λ

{1.64012, 4.5846, 7.62612, 10.6753, 13.7308, 16.7925, 19.8605, 22.9347,
26.0149, 29.1006, 32.1915, 35.2871, 38.387, 41.4906, 44.5977, 47.7078}

B

{-0.0613756, -0.0602364, -0.0582922, -0.0554545, -0.0520415,
-0.0483074, -0.0444655, -0.0406792, -0.0370619, -0.0336831,
-0.0305777, -0.027756, -0.0252124, -0.0229311, -0.0208916, -0.019071}

Determinate le soluzioni per i due problemi posso scrivere:

$\theta[\xi, \tau] :=$

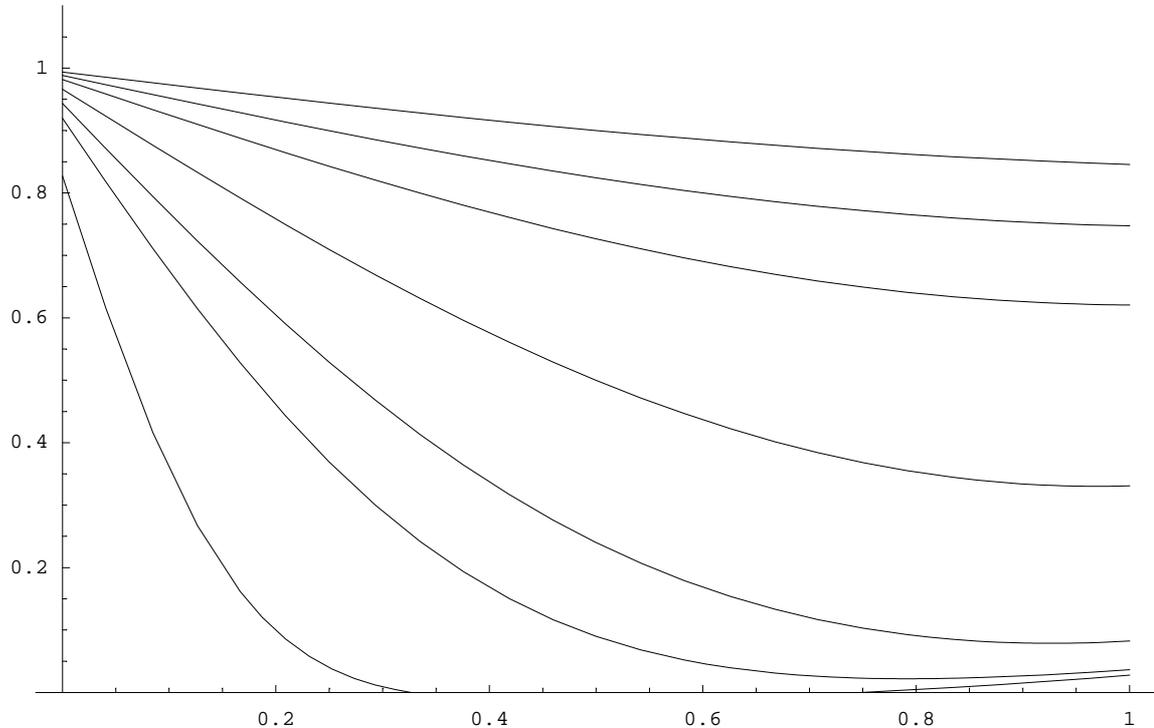
$$\theta_s[\xi] + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Exp}[-(\lambda[[n]])^2 * \tau] * B[[n]] * \left(\frac{B_{if}}{\lambda[[n]]} * \sin[\lambda[[n]] \xi] + \cos[\lambda[[n]] \xi] \right)$$

Considerando 16 termini nella sommatoria (quanto i λ trovati) è possibile plottare il profilo nella lastra

```

θ[ξ_, τ_] :=
  θs[ξ] + ∑n=116 (Exp[-(λ[[n]])2 * τ] * B[[n]] * (  $\frac{B_{if}}{\lambda[[n]]} * \sin[\lambda[[n]] \xi] + \cos[\lambda[[n]] \xi]$  ))
Plot[{θ[ξ, 0.01], θ[ξ, 0.05], θ[ξ, 0.1], θ[ξ, 0.25], θ[ξ, 0.5], θ[ξ, 0.7], θ[ξ, 1]},
  {ξ, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1.1}]

```



- Graphics -

A questo punto è possibile valutare il valore della temperatura del ferro nel cemento armato:

La posizione del ferro adimensionalizzata è:

$$\frac{0.04}{0.3}$$

$$0.133333$$

Il tempo adimensionalizzato è:

$$\frac{2 * 3600 * a}{L^2}$$

$$0.3264$$

$$T_{ferro} = T_i + \theta[0.1333333333333333, 0.0816] (T_f - T_i)$$

$$551.627$$

Lastra con isolante con α_f infinito

Consideriamo una parete di cemento che presenta tali caratteristiche:

spessore [m]:

$$L_p = 0.3;$$

conducibilità termica [$\frac{W}{mK}$]

$$k_p = 1.91;$$

diffusività termica nel materiale [$\frac{m^2}{s}$]:

$$a = 1.02 \cdot 10^{-6};$$

Tale parete da un lato è ricoperta da intonaco e su tale lato è esposta ad un incendio

La temperatura iniziale a cui si trova la mia parete e quindi anche l'intonaco, espressa in gradi centigradi è:

$$T_i = 20;$$

L'intonaco presenta una conducibilità termica [$\frac{W}{mK}$]:

$$k_i = 0.15;$$

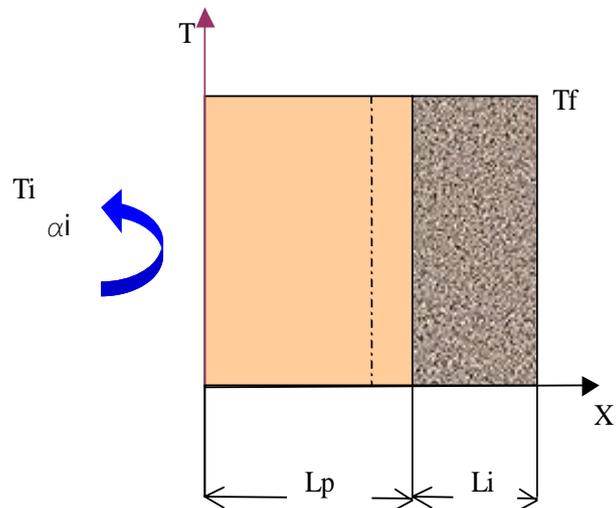
spessore [m]:

$$L_i = 0.15;$$

La temperatura del fluido che lambisce l'intonaco espressa in gradi centigradi è:

$$T_f = 800;$$

Studieremo il caso in cui α_f , il coefficiente di scambio termico convettivo, sia "infinito" ovvero la temperatura della faccia dell'intonaco esposta all'incendio è pari alla temperatura del fluido che la lambisce:



Considerando il volume di controllo che racchiude l'intonaco, e schematizzando la presenza del fluido e del materiale con delle resistenze termiche è possibile valutare il flusso di calore specifico entrante con la seguente relazione:

$$q = \frac{T_f - T(x = L_p^-, t)}{\frac{L_i}{k_i}}$$

Essendo tale flusso di calore lo stesso che entra nella parete, facendo un bilancio all'interfaccia si

ha:

$$\frac{k_p}{L_p} * \partial_x T(x = L_p^+, t) = \frac{T_f - T(x = L_p^-, t)}{\frac{L_i}{k_i}}$$

a questa prima relazione di accoppiamento dei due problemi se ne aggiunge una seconda, che conserva la continuità della temperatura:

$$T(x = L_p^-, t) = T(x = L_p^+, t)$$

da tale relazione si ricava che :

$$\partial_x T(x = L_p^+, t) = \frac{L_p}{k_p} * \frac{1}{\frac{L_i}{k_i}} * (T_f - T(x = L_p^+, t))$$

Chiamando con B_{if} il coefficiente:

$$B_{if} = \frac{Lp}{kp} * \frac{1}{\frac{Li}{ki}}$$

0.157068

Rispetto al caso di α_f finito la resistenza convettiva scompare e, per diversificare dal caso precedente poniamo che ad $x=0$ la temperatura sia proprio T_i

E' ragionevole supporre questo vincolo per porre in sicurezza il lato considerato, similmente al caso con condizione di adiabaticità

Si scrive quindi l'equazione del bilancio di energia e le relative condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} T_t &= T_{xx} \\ T(x=0, t) &= T_i \\ \partial_x T(x=Lp^+, t) &= B_{if} * (T_f - T(x=Lp^+, t)) \\ T(x, t=0) &= T_i \end{aligned}$$

Definito il nostro modello siamo interessati a definire dopo 2 ore di esposizione ad incendio che temperatura raggiungerà del ferro nella soletta posto ad una distanza di 4cm dall'intonaco.

Avendo resistenza termica trascurabile il ferro, possiamo semplicemente valutare il valore della temperatura in quel punto.

Adimensionalizzando il problema in questo modo:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t * a}{Lp^2} \\ \xi &= \frac{x}{Lp} \\ \theta &= \frac{T - T_i}{T_f - T_i} \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \theta_\tau &= \theta_{\xi\xi} \\ \theta(\xi=0, \tau) &= 0 \\ \theta_\xi(\xi=1, \tau) &= B_{if} * (1 - \theta(1, \tau)) \\ \theta(\xi, \tau=0) &= 0 \end{aligned}$$

Tale problema presentandosi lineare ma non omogeneo ammette la soluzione attraverso il metodo delle soluzioni parziali, cioè considero la soluzione di $\theta(\xi, \tau)$ costituita da una soluzione stazionaria ed una variabile:

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_s(\xi) + \theta_v(\xi, \tau).$$

Sostituendo nel mio modello otterrò due sottoproblemi da risolvere, spostando la non omogeneità nel problema stazionario:

$$\begin{aligned} \theta_{s,\xi\xi} &= 0 \\ \theta_{s,\xi}(1) + B_{if}(\theta_s(1) - 1) &= 0 \\ \theta_s(0) &= 0 \end{aligned}$$

tale problema ammette come soluzione:

$$\theta_s(\xi) = c1 * \xi + c2$$

```
Simplify[DSolve[{theta''[\xi] == 0, theta'[1] == -Bif (theta[1] - 1), theta[0] == 0}, theta[\xi], \xi]]
{{theta[\xi] -> 0.135747 \xi}}
```

Le costanti della soluzione del problema stazionario sono:

$$c2 = 0;$$

$$c1 = \frac{B_{if}}{1 + B_{if}}$$

$$0.135747$$

$$\theta_s[\xi] := c1 \xi + c2$$

Il problema dinamico in vece sarà :

$$\theta_{v,\tau} = \theta_{v,\xi\xi}$$

$$\theta_v(0, \tau) = 0$$

$$\theta_{v,\xi}(1, \tau) = -B_{if} * \theta_v(1, \tau)$$

$$\theta_v(\xi, \tau = 0) = -\theta_s(\xi) = -(c1 \xi + c2)$$

Essendo tale problema omogeneo posso risolverlo con il metodo delle variabili separabili, cioè da una soluzione costituita dal prodotto di due funzioni indipendenti :

$$\theta_v(\xi, \tau) = X(\xi) * T(\tau)$$

Sostituendo tale soluzione nel bilancio di energia adimensionalizzato, ricavo che :

$$\frac{X''(\xi)}{X(\xi)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = -\lambda^2$$

Da tale uguaglianza è evidente che i due rapporti devono essere uguali ad una costante, che deve essere presa negativa affinché la temperatura non diverga in base alla soluzione della funzione dipendente dalla τ :

$$T[\tau] := \text{Exp}[-\lambda^2 \tau];$$

$$X[\xi] = B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi];$$

$$\theta_v[\xi, \tau] := X[\xi] * T[\tau];$$

A questo punto utilizziamo le nostre condizioni al contorno per determinare il valore delle costanti:

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$T[\tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau}$$

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\partial_\xi \theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \text{Cos}[\lambda \xi] - B \lambda \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[\xi, \tau] := e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \text{Cos}[\lambda \xi] - B \lambda \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[0, \tau] = B_{if} * \theta_v[0, \tau]$$

$$A e^{-\lambda^2 \tau} \lambda = 0.157068 B e^{-\lambda^2 \tau}$$

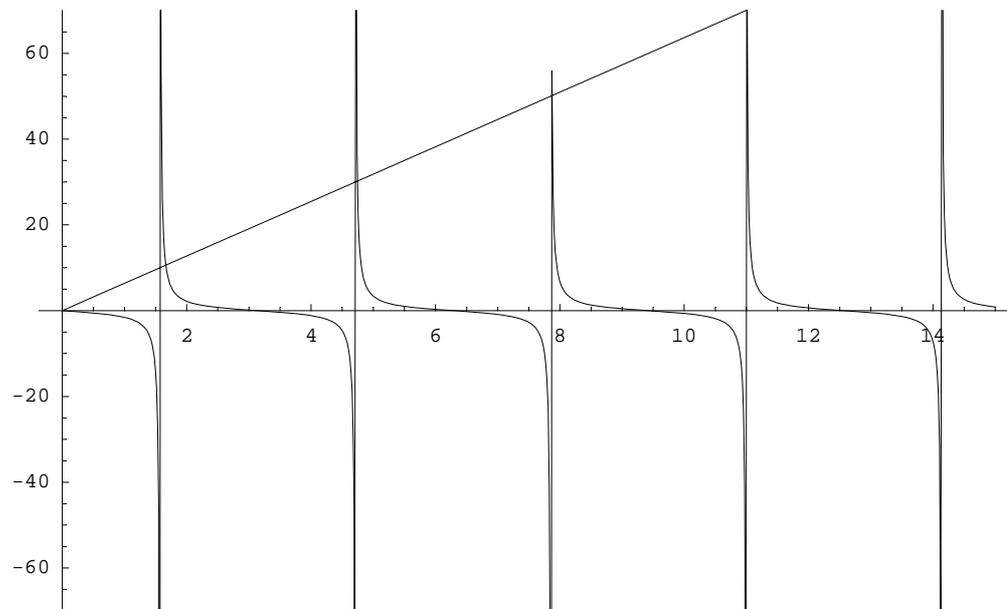
Dalla prima condizione al contorno ottengo che la costante B deve essere nulla

```
Bif = 0.15706806282722513`
```

```
0.157068
```

Osservando graficamente le soluzioni del problema vedo che:

```
Plot[{ $\frac{\lambda}{Bif}$ , -Tan[ $\lambda$ ]}, { $\lambda$ , 0, 15}, PlotRange -> {-70, 70}]
```



- Graphics -

abbiamo trovato le prime quattro soluzioni per via numerica e le successive si discostano le une dalle altre con una periodicità di π :

```
 $\lambda = x /. \text{Table} [\text{FindRoot} [\frac{x}{Bif} == -\text{Tan}[x], \{x, i * \pi + \pi / 2\}, \text{MaxIterations} \rightarrow 30], \{i, 20\}]$ 
```

```
{1.66486, 4.74548, 7.854, 11.0098, 14.1514, 17.293, 20.4346, 23.5762, 26.7178, 29.8594,
```

```
33.0009, 36.1425, 39.2841, 42.4257, 45.5673, 48.7089, 51.8505, 54.9921, 58.1337}
```

Imponendo l'ultima condizione derivante dalla condizione iniziale si ha:

$$\theta_v[\xi, 0] = -\theta_s[\xi];$$

Dovendo essere A una costante si sfruttano le infinite soluzioni di λ , infatti essendo il problema lineare è possibile vedere come soluzione una combinazione delle infinite soluzioni:

$$\theta_s[\xi]$$

$$0.135747 \xi$$

$$\mathbf{x}[\xi_n] := \mathbf{A}_n (\sin[\lambda \xi]);$$

"n" parte da 0 ma non significa che è $\lambda=0$ ma solo il primo valore calcolato di λ che è 1.66486 perchè λ non può mai essere nullo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n (\sin[\lambda[n] \xi]) = -\theta_s[\xi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \sin[\lambda[n] \xi] = -0.135747 \xi$$

sfruttando l'ortogonalità delle autofunzioni $X[\xi]$ e considerando una funzione peso unitaria si può moltiplicare la condizione iniziale per una generica auto funzione $X_m(\xi)$:

$$\mathbf{x}_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathbf{x}_m(\xi) \mathbf{x}_n(\xi) \mathbf{T}(0)$$

Si può quindi procedere all'integrazione tra 0 e 1 che consente di eliminare tutti i termini eccetto l'm-esimo

$$\int_0^1 \mathbf{x}_m(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^1 \mathbf{x}_m(\xi) \mathbf{x}_n(\xi) d\xi$$

e considerando che nel nostro caso particolare $X_m(\xi) = \sin[\lambda[m] \xi]$ si ricava che il valore delle n costanti A_n :

$$\mathbf{A} = - \frac{\int_0^1 \theta_s[\xi] * (\sin[\mathbf{x} \xi]) d\xi}{\int_0^1 (\sin[\mathbf{x} \xi])^2 d\xi}$$

$$= - \frac{0.135747 \left(-\frac{\cos[\mathbf{x}]}{\mathbf{x}} + \frac{\sin[\mathbf{x}]}{\mathbf{x}^2} \right)}{\frac{1}{2} - \frac{\sin[2\mathbf{x}]}{4\mathbf{x}}}$$

$$\mathbf{A} = \text{Together}[\mathbf{A}]$$

$$\frac{0.542986 \mathbf{x} \cos[\mathbf{x}] - 0.542986 \sin[\mathbf{x}]}{\mathbf{x} (2\mathbf{x} - \sin[2\mathbf{x}])}$$

Ricordando quindi i valori dei λ_n calcolati in precedenza

$$\mathbf{x} = \lambda$$

$$\{1.66486, 4.74548, 7.854, 11.0098, 14.1514, 17.293, 20.4346, 23.5762, 26.7178, 29.8594, 33.0009, 36.1425, 39.2841, 42.4257, 45.5673, 48.7089, 51.8505, 54.9921, 58.1337\}$$

è possibile calcolare finalmente i valori delle A_n :

A

```
{-0.106833, 0.0138456, -0.00440189, 0.00258697,
-0.00162683, 0.00113017, -0.000838518, 0.00065181, -0.000524561,
0.000433612, -0.000366136, 0.000314548, -0.000274118, 0.000241769,
-0.000215428, 0.000193651, -0.00017541, 0.000159954, -0.000146725}
```

Determinate le soluzioni per i problemi stazionario ed instazionario si può scrivere:

λ

```
{1.66486, 4.74548, 7.854, 11.0098, 14.1514, 17.293, 20.4346, 23.5762, 26.7178, 29.8594,
33.0009, 36.1425, 39.2841, 42.4257, 45.5673, 48.7089, 51.8505, 54.9921, 58.1337}
```

B_{if}

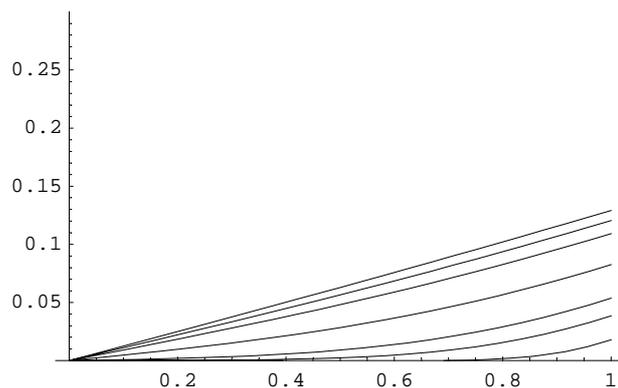
```
0.157068
```

E considerando 18 termini nella sommatoria è possibile "plottare" il profilo nella lastra:

```

$$\theta[\xi, \tau] := \theta_s[\xi] + \sum_{n=1}^{18} (\text{Exp}[-(\lambda[n])^2 * \tau] * \mathbf{A}[n] * (\text{Sin}[\lambda[n] \xi]))$$

Plot[{θ[ξ, 0.01], θ[ξ, 0.05], θ[ξ, 0.1], θ[ξ, 0.25], θ[ξ, 0.5], θ[ξ, 0.7], θ[ξ, 1]},
{ξ, 0, 1}, PlotRange → {0, 0.3}]
```



- Graphics -

A questo punto è possibile valutare il valore della temperatura del ferro nel cemento armato a 4 cm dall'interfaccia intonaco-parete:

la posizione del ferro adimensionalizzata è:

```
0.26 / 0.3
```

```
0.866667
```

il tempo adimensionalizzato è:

$$\frac{2 * 3600 * a}{Lp^2}$$

```
0.0816
```

Si ha quindi:

$$T_{\text{ferro}} = T_i + \theta[0.867, 0.0816] (T_f - T_i)$$

44.4443

Lastra con isolante con α_f finito

Consideriamo una parete di cemento armato che presenta tali caratteristiche:

spessore [m]:

$$L_p = 0.3;$$

conducibilità termica $[\frac{W}{mK}]$

$$k_p = 1.91;$$

diffusività termica nel materiale $[\frac{m^2}{s}]$:

$$a = 1.02 * 10^{-6};$$

Tale parete da un lato è ricoperta da intonaco, e su tale lato è esposta ad un incendio, dall'altro la faccia è adiabatica .

La temperatura iniziale a cui si trova la mia parete e quindi anche l'intonaco, espressa in gradi centigradi è:

$$T_i = 20;$$

L'intonaco presenta una capacità termica trascurabile e

conducibilità termica $[\frac{W}{mK}]$:

$$k_i = 0.15;$$

spessore [m]:

$$L_i = 0.15;$$

La temperatura del fluido che lambisce l'intonaco espressa in gradi centigradi è:

$$T_f = 800;$$

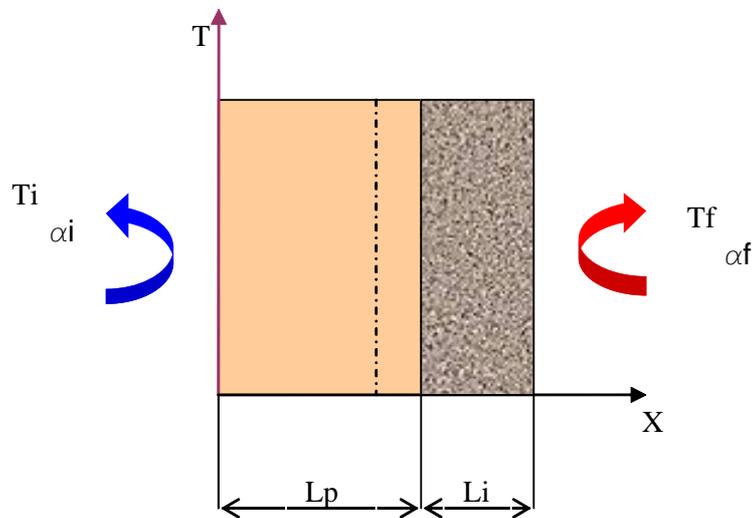
il coefficiente di scambio termico convettivo $[\frac{W}{m^2K}]$:

$$\alpha_f = 400;$$

$$\alpha_i = 1;$$

$$B_{ii} = \alpha_i * L_p / k_p$$

$$0.157068$$



Considerando il volume di controllo che racchiude l'intonaco, e schematizzando la presenza del fluido e del materiale con delle resistenze termiche è possibile valutare il flusso di calore specifico entrante con la seguente relazione:

$$q = \frac{T_f - T(x=L_p^-, t)}{\frac{1}{\alpha_f} + \frac{L_i}{k_i}}$$

Essendo tale flusso di calore lo stesso che entra nella parete, facendo un bilancio all'interfaccia si

ha:

$$\frac{k_p}{L_p} * \partial_x T(x=L_p^+, t) = \frac{T_f - T(x=L_p^-, t)}{\frac{1}{\alpha_f} + \frac{L_i}{k_i}}$$

a questa prima relazione di accoppiamento dei due problemi se ne aggiunge una seconda, che conserva la continuità della temperatura:

$$T(x=L_p^-, t) = T(x=L_p^+, t)$$

da tale relazione si ricava che :

$$\partial_x T(x=L_p^+, t) = \frac{L_p}{k_p} * \frac{1}{\frac{1}{\alpha_f} + \frac{L_i}{k_i}} * (T_f - T(x=L_p^+, t))$$

Chiamando con Bi il coefficiente:

$$B_{if} = \frac{Lp}{kp} * \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_f} + \frac{L_i}{k_i}\right)}$$

0.156676

$$\frac{1}{\alpha} T_t = T_{xx}$$

$$\partial_x T (x = 0, t) = B_{ii} * (T (x = 0, t) - T_i)$$

$$\partial_x T (x = Lp^+, t) = B_{if} * (T_f - T (x = Lp^+, t))$$

$$T (x, t = 0) = T_i$$

Definito il nostro modello siamo interessati a definire dopo 2 ore di esposizione ad incendio che temperatura raggiungerà del ferro nella soletta posto ad una distanza di 4cm dall'intonaco.

Avendo resistenza termica trascurabile il ferro, possiamo semplicemente valutare il valore della temperatura in quel punto.

Adimensionalizzando il problema in questo modo:

$$\tau = \frac{t * a}{Lp^2}$$

$$\xi = \frac{x}{Lp}$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_f - T_i}$$

si ha:

$$\theta_\tau = \theta_{\xi\xi}$$

$$\theta_\xi (\xi = 0, \tau) = B_{ii} * \theta (0, \tau)$$

$$\theta_\xi (\xi = 1, \tau) = B_{if} * (1 - \theta (1, \tau))$$

$$\theta (\xi, \tau = 0) = 0$$

Tale problema presentandosi lineare ma non omogeneo ammette la soluzione attraverso il metodo delle soluzioni parziali, cioè considero la soluzione di $\theta (\xi, \tau)$ costituita da una soluzione stazionaria ed una variabile:

$$\theta (\xi, \tau) = \theta_s (\xi) + \theta_v (\xi, \tau).$$

Sostituendo nel mio modello otterrò due sottoproblemi da risolvere, spostando la non omogeneità nel problema stazionario:

$$\theta_{s,\xi\xi} = 0$$

$$\theta_{s,\xi} (1) + B_{if} (\theta_s (1) - 1) = 0$$

$$\theta_{s,\xi} (0) - B_{ii} * \theta_s (0) = 0$$

tale problema ammette come soluzione:

$$\theta_s (\xi) = c1 * \xi + c2$$

Simplify[

DSolve[{ $\theta_s'[\xi] == 0$, $\theta_s'[1] == -B_{if} (\theta_s[1] - 1)$, $\theta_s'[0] == B_{ii} * \theta_s[0]$ }, $\theta_s[\xi]$, ξ]

{ $\theta_s[\xi] \rightarrow 0.463056 + 0.0727312 \xi$ }

$$c2 = \frac{B_{if}}{B_{ii} * B_{if} + B_{if} + B_{ii}}$$

$$c1 = c2 * B_{ii}$$

$$0.463056$$

$$0.0727312$$

$$\theta_s[\xi_] := c1 \xi + c2$$

Il problema dinamico in vece sarà :

$$\theta_{v,\tau} = \theta_{v,\xi\xi}$$

$$\theta_{v,\xi}(0, \tau) = B_{ii} \theta_v(0, \tau)$$

$$\theta_{v,\xi}(1, \tau) = -B_{if} * \theta_v(1, \tau)$$

e parte va considerata la condizione di ACCOPPIAMENTO tra problema dinamico e stazionario, che deriva dalla condizione iniziale :

$$\theta_v(\xi, \tau = 0) = -\theta_s(\xi) = -(c1 * \xi + c2)$$

Essendo tale problema omogeneo posso risolverlo con il metodo delle variabili separabili, cioè da una soluzione costituita dal prodotto di due funzioni indipendenti :

$$\theta_v(\xi, \tau) = X(\xi) * T(\tau)$$

Sostituendo tale soluzione nel bilancio di energia adimensionalizzato, ricavo che :

$$\frac{X''(\xi)}{X(\xi)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = -\lambda^2$$

Da tale uguaglianza è evidente che i due rapporti devono essere uguali ad una costante, che deve essere presa negativa affinché la temperatura non diverga in base alla soluzione della funzione dipendente dalla τ :

$$T[\tau_] := \text{Exp}[-\lambda^2 \tau];$$

$$X[\xi_] = B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi];$$

$$\theta_v[\xi_, \tau_] := X[\xi] * T[\tau];$$

A questo punto interroghiamo le nostre condizioni al contorno per determinare il valore delle costanti:

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$T[\tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau}$$

$$\theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (B \text{Cos}[\lambda \xi] + A \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\partial_\xi \theta_v[\xi, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \text{Cos}[\lambda \xi] - B \lambda \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[\xi_, \tau_] := e^{-\lambda^2 \tau} (A \lambda \text{Cos}[\lambda \xi] - B \lambda \text{Sin}[\lambda \xi])$$

$$\theta_{v,\xi}[0, \tau] == B_{if} * \theta_v[0, \tau]$$

$$A e^{-\lambda^2 \tau} \lambda == 0.156676 B e^{-\lambda^2 \tau}$$

dall'applicazione delle condizioni al contorno si può notare che sopravvivono entrambe le costanti A e B e ne scriviamo una in dipendenza dall'altra

■ in effetti rispetto al caso senza isolante c'è un'inversione dei 2 Bi, per la θ , ha lo stesso sviluppo

$$A = \frac{B_{ii} B}{\lambda};$$

$$\theta_{v,\xi}[1, \tau] == -B_{if} * \theta_v[1, \tau]$$

$$e^{-\lambda^2 \tau} (0.157068 B \cos[\lambda] - B \lambda \sin[\lambda]) == -0.156676 e^{-\lambda^2 \tau} \left(B \cos[\lambda] + \frac{0.157068 B \sin[\lambda]}{\lambda} \right)$$

A

$$\{-0.138209, 0.00140391, -0.000192177, 0.000057955, -0.0000246028, \\ 0.0000126332, -7.32245 \times 10^{-6}, 4.61562 \times 10^{-6}, -3.09402 \times 10^{-6}, 2.17395 \times 10^{-6}, \\ -1.58529 \times 10^{-6}, 1.19132 \times 10^{-6}, -9.17777 \times 10^{-7}, 7.21953 \times 10^{-7}, -5.78097 \times 10^{-7}, \\ 4.70054 \times 10^{-7}, -3.8734 \times 10^{-7}, 3.22946 \times 10^{-7}, -2.7207 \times 10^{-7}, 2.31342 \times 10^{-7}\}$$

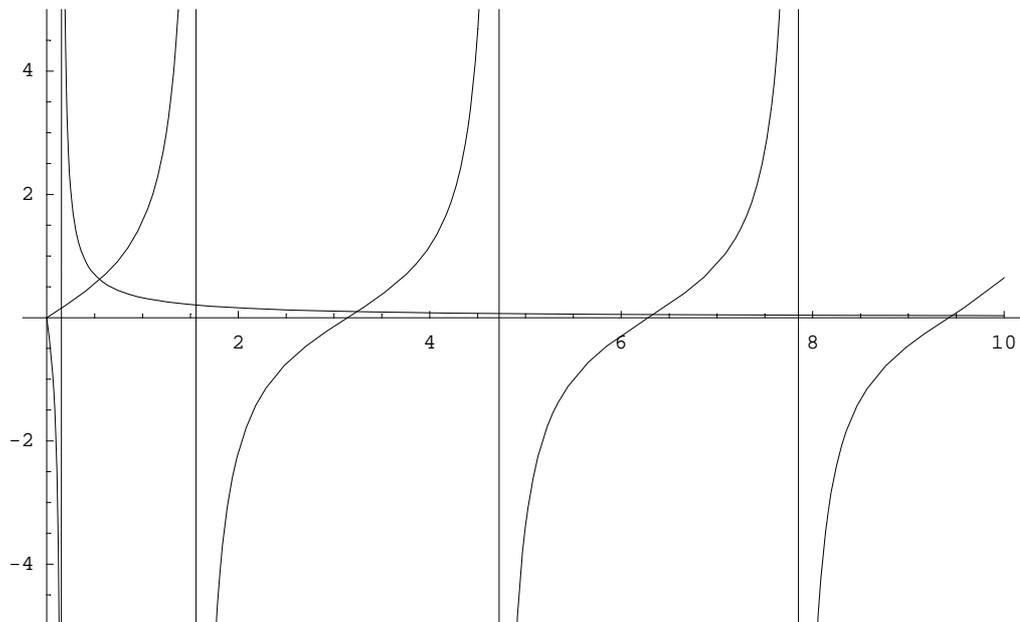
Da quest'ultima relazione si ricava che deve essere soddisfatta tale condizione:

$$B_{if} \cos[\lambda] - \lambda \sin[\lambda] + \frac{B_{if} B_{ii}}{\lambda} * \sin[\lambda] + B_{ii} \cos[\lambda] == 0$$

$$0.313744 \cos[\lambda] + \frac{0.0246089 \sin[\lambda]}{\lambda} - \lambda \sin[\lambda] == 0$$

Osservando graficamente le soluzioni del problema vedo che:

$$\text{Plot}\left[\left\{\frac{\lambda * (B_{if} + B_{ii})}{\lambda^2 - B_{if} B_{ii}}, \tan[\lambda]\right\}, \{\lambda, 0, 10\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{-5, 5\}\right]$$



- Graphics -

Volendo valutare il valore preciso delle soluzioni, otteniamo:

```

λ = x /. Table [
  FindRoot [  $\frac{x * (B_{if} + B_{ii})}{x^2 - B_{if} B_{ii}} == \text{Tan}[x], \{x, i * \pi - 1.577\}, \text{MaxIterations} \rightarrow 30 \}$ , {i, 20} ]
{0.552911, 3.2384, 6.33272, 9.45795, 12.5913, 15.7279,
 18.8662, 22.0054, 25.1452, 28.2854, 31.4259, 34.5666, 37.7074,
 40.8484, 43.9894, 47.1305, 50.2717, 53.4129, 56.5542, 59.6955}

```

si può notare che alla ventesima λ ho una differenza pari a π con la diciannovesima

Imponendo l'ultima condizione si ha:

$$\theta_v[\xi, 0] == -\theta_s[\xi];$$

Dovendo essere A una costante si sfruttano le infinite soluzioni di λ , infatti essendo il problema lineare è possibile vedere come soluzione una combinazione delle infinite soluzioni:

$$\theta_s[\xi]$$

$$0.463056 + 0.0727312 \xi$$

$$x[\xi_n] := B_n \left(\frac{B_{ii}}{\lambda} * \sin[\lambda \xi] + \cos[\lambda \xi] \right);$$

si può notare che la differenza con l'autofunzione dell'esempio senza isolante sta solo in B_{ii}

"n" parte da 0 ma non significa che è $\lambda=0$ ma solo il primo valore calcolato di λ che è 1.64012. Perché λ non può mai essere nullo

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{B_{ii}}{\lambda[n]} * \sin[\lambda[n] \xi] + \cos[\lambda[n] \xi] \right) == -\theta_s[\xi]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{B_{ii} \sin[\lambda[n] \xi]}{\lambda[n]} + \cos[\lambda[n] \xi] \right) == -0.463056 - 0.0727312 \xi$$

sfruttando l'ortogonalità delle autofunzioni $X[\xi]$, si ricava che:

$$B = - \frac{\int_0^1 \theta_s[\xi] * \left(\frac{B_{ii}}{x} * \sin[x \xi] + \cos[x \xi] \right) d\xi}{\int_0^1 \left(\frac{B_{ii}}{x} * \sin[x \xi] + \cos[x \xi] \right)^2 d\xi}$$

$$= \frac{-0.0114238 \cos[x] + 0.0727312 (0.157068 + 7.36667 x^2) \sin[x]}{0.5 + \frac{0.0908692}{x^2} - \frac{0.078534 \cos[2x]}{x^2} - \frac{0.00616759 \sin[2x]}{x^3} + \frac{0.25 \sin[2x]}{x}}$$

B = Together[B]

$$\frac{0.0114238 x \cos[x] - 0.0114238 \sin[x] - 0.535787 x^2 \sin[x]}{0.0908692 x + 0.5 x^3 - 0.078534 x \cos[2x] - 0.00616759 \sin[2x] + 0.25 x^2 \sin[2x]}$$

x = λ

```

{0.552911, 3.2384, 6.33272, 9.45795, 12.5913, 15.7279,
 18.8662, 22.0054, 25.1452, 28.2854, 31.4259, 34.5666, 37.7074,
 40.8484, 43.9894, 47.1305, 50.2717, 53.4129, 56.5542, 59.6955}

```

B

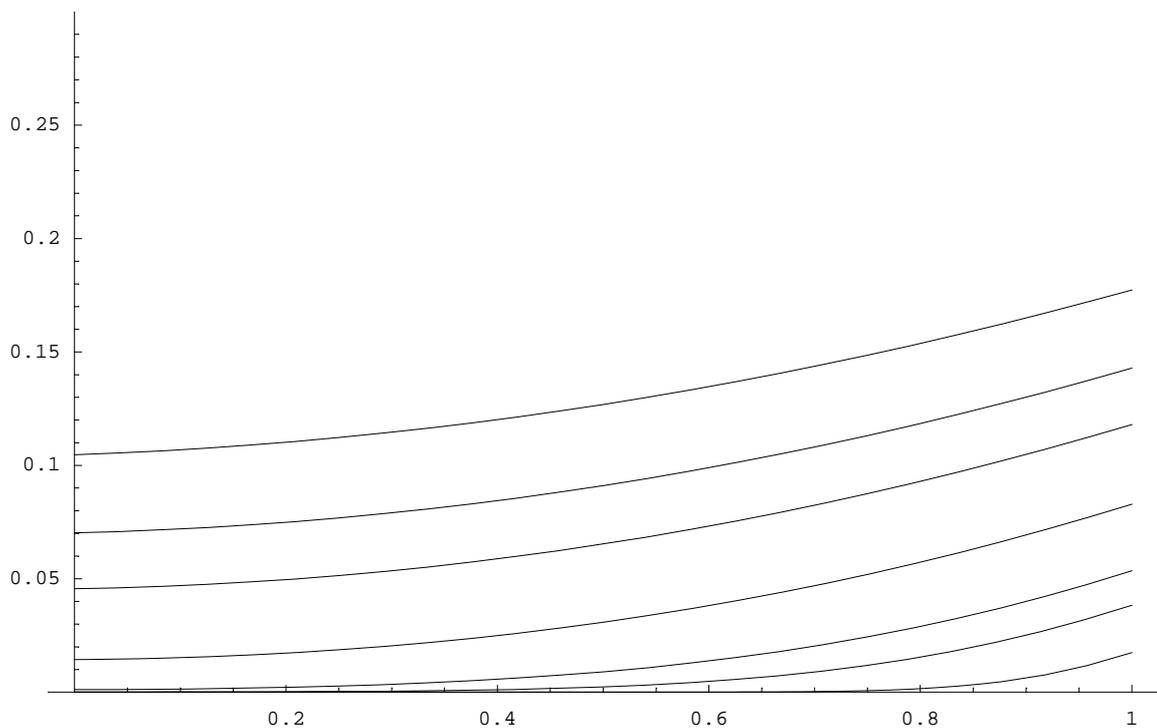
```
{-0.486524, 0.0289456, -0.00774826, 0.0034898, -0.00197227,
0.00126502, -0.000879534, 0.000646653, -0.000495325, 0.000391493,
-0.000317182, 0.000262179, -0.000220331, 0.000187757, -0.000161905,
0.000141047, -0.000123973, 0.000109822, -0.000097962, 0.0000879243}
```

Determinate le soluzioni per i due problemi posso scrivere:

$$\theta[\xi, \tau] := \theta_s[\xi] + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Exp}[-(\lambda[[n]])^2 * \tau] * B[[n]] * \left(\frac{B_{ii}}{\lambda[[n]]} * \text{Sin}[\lambda[[n]] \xi] + \text{Cos}[\lambda[[n]] \xi] \right)$$

Considerando 20 termini nella sommatoria è possibile plottare il profilo nella lastra

```
 $\theta[\xi, \tau] :=$ 
 $\theta_s[\xi] + \sum_{n=1}^{20} \left( \text{Exp}[-(\lambda[[n]])^2 * \tau] * B[[n]] * \left( \frac{B_{ii}}{\lambda[[n]]} * \text{Sin}[\lambda[[n]] \xi] + \text{Cos}[\lambda[[n]] \xi] \right) \right)$ 
Plot[{ $\theta[\xi, 0.01]$ ,  $\theta[\xi, 0.05]$ ,  $\theta[\xi, 0.1]$ ,  $\theta[\xi, 0.25]$ ,  $\theta[\xi, 0.5]$ ,  $\theta[\xi, 0.7]$ ,  $\theta[\xi, 1]$ },
{ $\xi, 0, 1$ }, PlotRange -> {0, 0.3}]
```



- Graphics -

A questo punto è possibile valutare il valore della temperatura del ferro nel cemento armato:

La posizione del ferro adimensionalizzata è:

```
0.26 / 0.3
```

```
0.866667
```

Il tempo adimensionalizzato è:

$$\frac{2 * 3600 * a}{Lp^2}$$

0.0816

$$T_{ferro} = T_i + \theta[0.867, 0.0816] (T_f - T_i)$$

44.3838

TABELLA DEI RISULTATI OTTENUTI

Le temperature sono espresse in gradi centigradi

	Lastra senza isolante	Lastra con isolante (con condizione di adiabaticità)	Corpo seminfinito senza isolante	Corpo seminfinito con isolante
Alfa finito	551.627	44.3838(54.4577)	575.375	62.4907
Alfa infinito	596.292	44.4443	598.263	62.5891