UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Tesina del corso di

TRASMISSIONE DEL CALORE

Docente Prof. Ing. Gennaro Cuccurullo

Tesina n.7B

Allievi:

Bevilacqua Ciro, Matr. 165/195

Esperto Vitantonio, Matr. 165/202

Tesina n. 7B

Nel caso di lastra piana con temperatura di parete costante e $Pr<<1$ è lecito (perché?) considerare nell'ambito dello strato limite termico ($\Delta<\Delta_T$) $U=U_\infty$. Mostrare che il problema è analogo a quello del transitorio di un corpo semi-infinito in pura conduzione. Mostrare la validità dell'eq. (7.89) del testo

Oggetto

L'oggetto del presente lavoro è individuare l'espressione del campo di temperatura nel dominio di fluido che lambisce una lastra piana con temperatura di parete costante nel caso di Pr <<1 e mostrare verificare l'analogia termica con un corpo seminfinito con temperatura di parete costante.

Inoltre si vuole mostrare la validità della equazione che fornisce il numero di Nusselt locale

$$Nu(X) = 0.564\sqrt{\mathrm{Re}_X}\,\sqrt{\mathrm{Pr}}$$

Modello matematico dello strato limite termico

Le equazioni che governano il fenomeno sono le equazioni dei bilanci nella forma differenziale nell'ipotesi di fluido newtoniano, stazionarietà, incomprimibilità, e proprietà del fluido ρ,densità, e μ,viscosità dinamica, non dipendenti dalla temperatura.

Il moto inviscido lontano dalla parete non può considerarsi tale nelle vicinanze di essa. Esiste infatti una regione detta di strato limite in cui non possono considerarsi trascurabili i fenomeni di dissipazione viscosa.

Il set di equazioni

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \underline{U} = O \\ &\rho \underline{U} \times \nabla \underline{U} - \nabla P = \mu \nabla^2 \underline{U} \\ &\rho c \underline{U} \times \nabla T = k \nabla^2 T \end{aligned} \tag{0.1}$$

descrive compiutamente il fenomeno con opportune condizioni al contorno:

$$\underline{U}(0,0)=\underline{0};$$
$$\underline{U}(X,\infty)=U_\infty;$$
$$\underline{U}(0,Y)=U_\infty;$$
$$P(X,\infty)=P_{esterna};$$
$$T(0,Y)=T_\infty;$$
$$T(X,\infty)=T_\infty;$$
$$T(X,0)=T_w;$$

Le prime 2 equazioni di (1.1) costituiscono un sistema di chiuso di equazioni per aver ipotizzato densità e viscosità dinamica costanti indipendenti dalla temperatura; per questo motivo la ricerca del campo di temperatura richiede preliminarmente la conoscenza del campo di velocità $\underline{U}(X,Y)$.

Le equazioni (1.1) vengono opportunamente adimensionalizzate; si scrivono pertanto le seguenti posizioni:

$$x=\frac{X}{L};\,y=\frac{Y}{\Delta};$$
$$u=\frac{U}{U_{rif}};\,v=\frac{V}{V_{rif}};$$
$$p=\frac{P}{P_{rif}};$$
$$t=\frac{T-T_w}{T_\infty-T_w};$$

Il processo di adimensionalizzazione conduce alle set di equazioni (Allegato A):

$$\begin{aligned} &u_x+v_y=0\\ &uu_x+vu_y=u_{yy}\\ &ut_x+vt_y=\frac{t_{yy}}{\Pr} \end{aligned} \qquad (0.2)$$

con le opportune BC (Boundary Conditions).

Con riferimento alla terza delle (1.2) ricerchiamo una soluzione in termini della variabile di similitudine $\eta=\frac{y}{\sqrt{x}}$.

Si riformula il problema in termini della variabile η. Si pone che la componente x della velocità sia:

$$u=f'(\eta) \qquad (0.3)$$

La componente y della velocità,v, può essere dedotta dalla equazione di continuità:

$$v_y = -u_x$$

esplicitando la scrittura della u_x in termini della variabile η:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2x}\eta \cdot u_\eta = -\frac{1}{2x}\eta \cdot f''(\eta)$$

v_y è, per l'equazione di continuità:

$$v_y = \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{v_\eta}{\sqrt{x}} = -u_x$$

$$v_\eta = \frac{\sqrt{x}}{2x}\eta \cdot f''(\eta)$$

$$v(\eta) - v(0) = \int_0^\eta \frac{\sqrt{x}}{2x}\eta \cdot f''(\eta) d\eta$$

Segue che, poiché $v(0) = 0$:

$$v(\eta) = \frac{\sqrt{x}}{2x}\int_0^\eta \eta \cdot d\left(f'(\eta)\right) \tag{0.4}$$

Integrando per parti l'ultimo integrale si ottiene:

$$v(\eta) = \frac{\sqrt{x}}{2x}\int_0^\eta \eta \cdot d\left(f'(\eta)\right) = \frac{\sqrt{x}}{2x}\left\{\left[\eta \cdot f'(\eta)\right]_0^\eta - \int_0^\eta f'(\eta) d\eta\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2x}\left(\eta \cdot f'(\eta) - f(\eta) + f(0)\right)$$

Si pone ora, perché si è interessati alla velocità e quindi alla derivata della $f(\eta)$,

$$f(0) = 0 \tag{0.5}$$

e si ottiene:

$$v(\eta) = \frac{\sqrt{x}}{2x}\left(\eta \cdot f'(\eta) - f(\eta)\right) \tag{0.6}$$

La temperatura dimensionale t deve essere definita anche essa in termini della variabile di similitudine η:

$$t_x = \frac{\partial t}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2x}\eta \cdot t'(\eta) \tag{0.7}$$

$$t_y = \frac{\partial t}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{t'(\eta)}{\sqrt{x}} \tag{0.8}$$

$$t_{yy}=\frac{\partial\left(t_y\right)}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{t''(\eta)}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}=}\frac{t''(\eta)}{x} \tag{0.9}$$

Si sostituiscono ora i risultati ottenuti delle (0.3), (0.6), (0.7), (0.8), (0.9) nella terza del set di equazioni (0.2)

$$ut_x+vt_y=\frac{t_{yy}}{\Pr}$$

si ottiene così la seguente ODE:

$$f'\cdot t'\cdot\left(-\frac{\eta}{2x}\right)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(n\cdot f'-f\right)\cdot\frac{t'}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\Pr}\cdot\frac{t''}{\sqrt{x}} \tag{0.10}$$

Semplificando si ottiene la nota **equazione di Polhausen:**

$$\frac{\Pr}{2}f\cdot t'+t''=0 \tag{0.11}$$

All'equazione (0.11) si richiedono 2 BC essendo del II ordine; le 3 BC sulla temperatura

$$\begin{aligned}&t\left(0,y\right)=1;\\&t(x,\infty)=1;\\&t(0,y)=0;\end{aligned}$$

diventano in termini della variabile η:

$$\begin{aligned}&t\left(\eta=\infty\right)=1;\\&t(\eta=0)=0;\end{aligned} \tag{0.12}$$

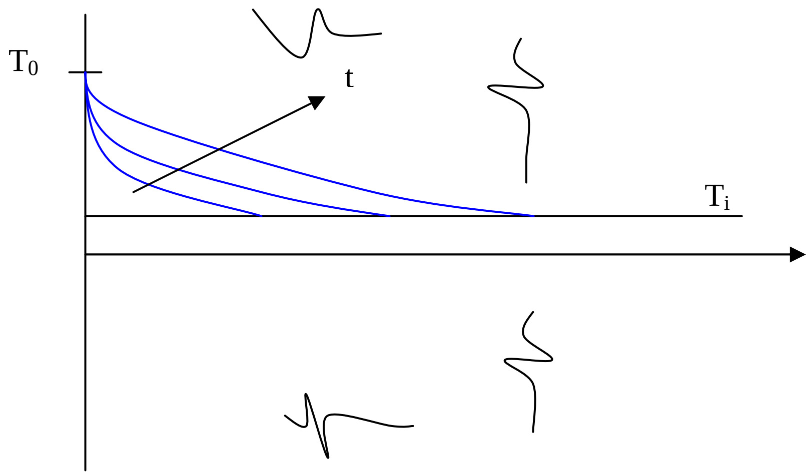
Come si può notare dall'analisi delle equazioni $t=t(\eta,\Pr)$. Il numero di Pr regola il rapporto tra le altezze di strato limite dinamico e termico; se Pr<<1 l'altezza di strato limite dinamico è molto minore dell'altezza di strato limite termico e quindi si può considerare che la velocità nella zona di strato limite termico è U_∞ o in termini dimensionali $u=1$. Sulla base di questa considerazione l'ODE (0.11) diventa

$$\frac{\Pr}{2}\eta\cdot t'+t''=0 \tag{0.13}$$

L'equazione (0.13) corredata delle BC (0.12) è integrabile per via analitica (Allegato B); la funzione $t(\eta)$ che si ricerca non è altro che la funzione degli errori $Erf\left(-\frac{\sqrt{\Pr}}{2}\eta\right)$. Il problema è formalmente uguale a quello del transitorio di un corpo semi-infinito con temperatura imposta alla parete infatti come sarà dimostrato tra poco l'ODE che regola il fenomeno è la stessa.

Modello matematico del corpo semi-infinito con BC del I tipo

Si supponga quindi di considerare un corpo semi-infinto con temperatura imposta alla parete pari a $T\left(0\right)$ e inizialmente a temperatura T_i.



Il set di equazioni che descrive compiutamente il fenomeno è il seguente:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{dT}{dt} \\
&T(x,0) = T_i \\
&T\left(0,t\right) = T_0 \\
&T(\infty, t>0) = T_i
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Il primo passo verso la soluzione del problema è, come di consueto, l'adimensionalizzazione; questa porge, con l'introduzione delle seguenti grandezze dimensionali

$$\vartheta = \frac{T - T_i}{T - T_0};$$

$$\xi = \frac{x}{X_{rif}};$$

$$\tau = \frac{t}{t_{rif}};$$

il set di equazioni:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\xi\xi} = \vartheta_\tau \\
&\vartheta\left(0,\tau\right) = 1 \\
&\vartheta\left(\infty,\tau\right) = 0 \\
&\vartheta\left(\xi,0\right) = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

L'introduzione della variabile di similitudine $s = \dfrac{\xi}{f(\tau)}$ porta alla costruzione di un sistema alle ODE; il sistema (2.2) diventa:

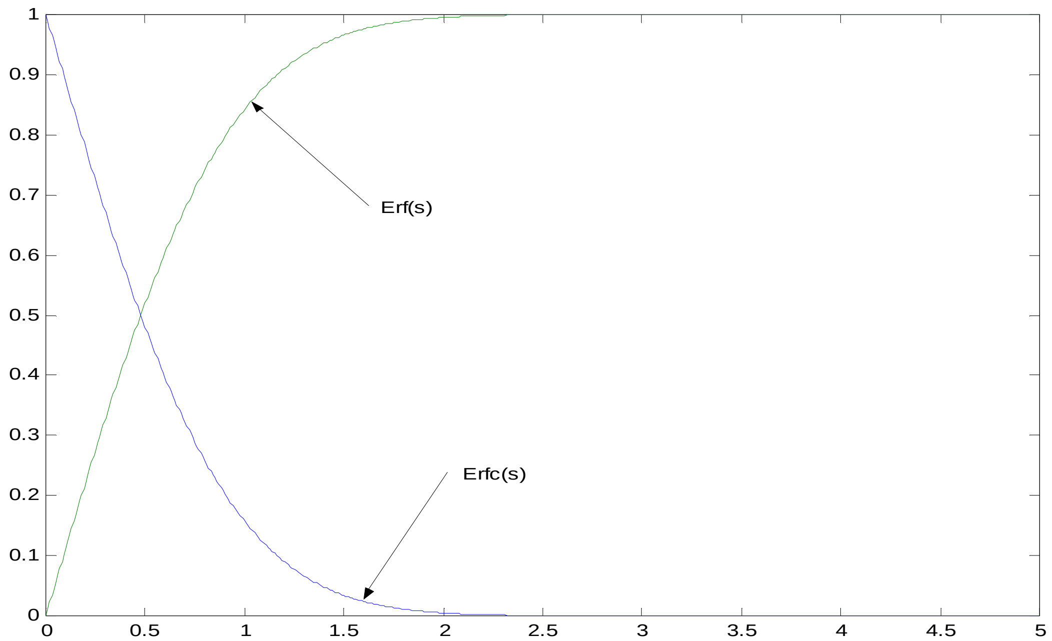
$$\begin{aligned} &\vartheta''(s) = -c^2 \vartheta'(s) \cdot s \\ &\vartheta(0) = 1 \\ &\vartheta(\infty) = 0 \\ &\frac{f'(\tau)}{f^3(\tau)} = -c^2 \\ &f(0) = \infty \end{aligned} \tag{2.3}$$

La funzione $\vartheta = \vartheta(s)$ richiesta è (Allegato C):

$$\vartheta = Erfc(s)$$

Analogia tra strato limite termico con $\Pr \ll 1$ e transitorio in un corpo semi-infinito

L'equazione che descrive lo strato limite termico nel caso di $\Pr \ll 1$ e l'equazione che descrive l'evoluzione della temperatura in caso di corpo seminfinito con temperatura imposta sono formalmente uguali. Le equazioni differiscono solo per le condizioni al contorno per cui in un caso si ottiene la funzione degli errori e nell'altro la sua complementare.



Si verifica cioè che la forma funzionale è la stessa; si può ottenere una funzione dall'altra semplicemente ribaltandola e traslandola di 1 sull'asse delle ordinate.

Valutazione del numero di Nusselt

In questa parte del lavoro di vuole mostrare la validità della relazione

$$Nu = 0.564\sqrt{\mathrm{Re}_X}\,\sqrt{\mathrm{Pr}} \tag{3.1}$$

A questo risultato si perviene grazie all'ipotesi di aderenza; si considera cioè uno strato di fluido fermo a contatto con la parete. Limitatamente a questo strato si può scrivere il seguente bilancio:

$$-k\frac{\partial T}{\partial Y} = \alpha(T_\infty - T_w) \tag{3.2}$$

In termini adimensionali si ottiene una espressione del numero di Nusselt locale considerando che la variabile η si può così scrivere:

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{Y}{\Delta}}{\sqrt{\frac{X}{L}}} = \frac{Y\sqrt{\mathrm{Re}}}{\sqrt{X \cdot L}} = \frac{Y\sqrt{\mathrm{Re}_X}}{X}$$

Si ottiene così:

$$k\left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_X}}{X} = \alpha$$

e quindi

$$Nu_X = \left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \sqrt{\mathrm{Re}_X} \tag{3.3}$$

Il valore di Nu dipende quindi dal campo di temperatura $t = t(\eta)$ che si è visto essere nel caso di $\mathrm{Pr} \ll 1$ la funzione degli errori $Erf(\eta)$. Si esplicita quindi la derivata $\left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$.

La temperatura adimensionale è, come visto, $t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}dz$ con $z = \frac{\sqrt{\mathrm{Pr}}}{2}\eta$; per cui:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \left.\frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|_{z=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left.e^{-z^2}\right|_{z=0} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{Pr}}}{2}$$

semplificando:

$$\left.\frac{\partial t}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \frac{\sqrt{\mathrm{Pr}}}{\sqrt{\pi}} \tag{3.4}$$

per cui, come volevasi dimostrare, è:

$$Nu = 0.564\sqrt{\mathrm{Re}_X}\,\sqrt{\mathrm{Pr}} \tag{3.5}$$

Allegato A

Le equazioni dei bilanci nel dominio fluido bidimensionale nell'ipotesi di regime stazionario, moto incomprimibile a proprietà costanti,dissipazione viscosa e forze di massa trascurabili sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \underline{U} = O \\ &\rho \underline{U} \times \nabla \underline{U} - \nabla P = \mu \nabla^2 \underline{U} \\ &\rho c \underline{U} \times \nabla T = k \nabla^2 T \end{aligned} \tag{4.1}$$

corredate dalle seguenti condizioni al contorno:

Si tende ora a scrivere le equazioni (4.1) in termini adimensionali; le grandezze adimensionali scelte per il processo di adimensionalizzazione sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &x = \frac{X}{L}; y = \frac{Y}{\Delta}; \\ &u = \frac{U}{U_{rif}}; v = \frac{V}{V_{rif}}; \\ &p = \frac{P}{P_{rif}}; \\ &t = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}; \end{aligned}$$

La prima delle equazioni (4.1) in termini di componenti può scriversi come:

$$U_X + V_Y = 0$$

in termini delle grandezze adimensionali:

$$\frac{U}{L} u_x = \frac{V_{rif}}{\Delta} v_y$$

Si pone allora la seguente uguaglianza:

$$\frac{U_\infty}{L} = \frac{V_{rif}}{\Delta} \tag{4.2}$$

e si ottiene così

$$u_x = v_y \tag{4.3}$$

Si scrivono ora in termini adimensionali l'equazioni della quantità di moto nella direzione X e nella direzione Y. Scritta in componenti la seconda delle equazioni (4.1) diventa:

$$\begin{aligned} &\rho \left(U U_X + V U_Y \right) + P_Y = \mu \left(U_{XX} + U_{YY} \right) \\ &\rho \left(U V_X + V V_Y \right) + P_X = \mu \left(V_{XX} + V_{YY} \right) \end{aligned}$$

Sostituendo alle grandezze dimensionali quelle adimensionali si ottiene:

$$\rho\left(\frac{U_\infty{}^2}{L}uu_x+\frac{U_\infty V_{rif}}{\Delta}vu_y\right)+\frac{P_{rif}}{L}p_x=\mu\left(\frac{U_\infty}{L^2}u_{xx}+\frac{U_\infty}{\Delta^2}u_{yy}\right)$$
$$\rho\left(\frac{U_\infty V_{rif}}{L}uv_x+\frac{V_{rif}{}^2}{\Delta}vv_y\right)+\frac{P_{rif}}{\Delta}p_y=\mu\left(\frac{V_{rif}}{L^2}v_{xx}+\frac{V_{rif}}{\Delta^2}v_{yy}\right)$$

e tenendo conto della relazione (4.2) ponendo l'ordine di grandezza dei termini convettivi pari a 1 si ottiene, ponendo $P_{rif}=\rho U_\infty{}^2$:

$$uu_x+vu_y+p_x=\frac{\nu L}{U_\infty L^2}\left(u_{xx}+u_{yy}\frac{L^2}{\Delta^2}\right)$$
$$uv_y+vv_y+\frac{L^2}{\Delta^2}p_y=\frac{\nu}{U_\infty L}\left(v_{xx}+v_{yy}\frac{L^2}{\Delta^2}\right)$$

Si ipotizza ora che il rapporto $\frac{L}{\Delta}\gg 1$, si ipotizza cioè la **snellezza dello strato limite;** sotto questa ipotesi $u_{xx}\ll\frac{L^2}{\Delta^2}u_{yy}$ e $v_{xx}\ll v_{yy}\frac{L^2}{\Delta^2}$ per cui le equazioni diventano:

$$\begin{aligned}uu_x+vu_y+p_x&=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(u_{yy}\frac{L^2}{\Delta^2}\right)\\ uv_y+vv_y+\frac{L^2}{\Delta^2}p_y&=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(v_{yy}\frac{L^2}{\Delta^2}\right)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Le (4.4) porgono la relazione

$$\frac{L^2}{\Delta^2}=\mathrm{Re}\tag{4.5}$$

per cui si ottiene:

$$\begin{aligned}uu_x+vu_y+p_x&=u_{yy}\\ uv_y+vv_y+\mathrm{Re}\,p_y&=v_y\end{aligned}\tag{4.6}$$

Per fluidi come aria e acqua la viscosità cinematica ν è di $O\left(10^{-5}\div10^{-6}\right)$ per cui Re è di ordine $10^5\div10^6$. Sotto queste condizioni le (4.6) diventano:

$$\begin{aligned}uu_x+vu_y+p_x&=u_{yy}\\ p_y&=0\end{aligned}\tag{4.7}$$

Le (4.7) costituiscono la prima e la seconda approssimazione dello strato limite. In particolare la seconda delle (4.7) implica che la pressione è funzione della sola coordinata lungo la direzione del moto. Nella regione esterna il moto è inviscido per cui vale la **relazione di Bernoulli:** $\frac{P}{\rho}+\frac{U^2_\infty}{2}=P_0$.

Derivando rispetto a X la relazione di Bernoulli e ricordando che la la U_∞ non dipende da X si ottiene che $P_x=0$. Le equazioni allora diventano:

$$\begin{aligned} &uu_x+vu_y=u_{yy} \\ &p_y=0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

L'equazione dell'energia, la terza delle (4.1), deve essere opportunamente adimensionalizzata. Esplicitando le grandezze adimensionali si ottiene:

$$\frac{U_\infty}{L}\Delta T_{rif}ut_x+\frac{V_{rif}}{\Delta}\Delta T_{rif}vt_y=a\frac{\Delta T_{rif}}{L^2}\left(t_{xx}+\frac{L^2}{\Delta^2}t_{yy}\right)$$

nell'ipotesi di snellezza dello strato limite e alla luce delle relazioni (4.2) e (4.5) si ottiene

$$ut_x+vt_y=\frac{a}{U_\infty L}\left(\mathrm{Re}\,t_{yy}\right)$$

e infine:

$$ut_x+vt_y=\frac{1}{\mathrm{Pr}}t_{yy} \tag{4.9}$$

Allegato B

Si vuole cercare la soluzione dell'equazione

$$\frac{\Pr}{2}\eta \cdot t' + t'' = 0 \tag{5.1}$$

con le BC:

$$\begin{aligned} t(\infty) &= 0 \\ t(0) &= 1 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Posto allora $t' = p$ si ottiene :

$$\frac{\Pr}{2}\eta \cdot p + p' = 0 \tag{5.3}$$

da cui:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Pr}{2} d\left(\frac{\eta^2}{2}\right)$$

La relazione precedente può essere integrata e fornisce la funzione $p = p(\eta)$:

$$p = Ae^{-\frac{\Pr}{2}\frac{\eta^2}{2}}$$

Ricordando che $p = t'$ si ottiene:

$$t = A\int_0^{\eta} e^{-\Pr\frac{\eta^2}{4}} d\eta + B \tag{5.4}$$

Si ponga ora $\sqrt{\Pr}\,\frac{\eta}{2} = z$; con questa sostituzione di ottiene

$$t = \frac{2}{\sqrt{\Pr}} A\int_0^{z} e^{-z^2} dz + B \tag{5.5}$$

L'equazione (5.5) richiede le BC (5.2) per la determinazione delle costanti A e B.

La prima delle (5.2) impone che sia la costante $B = 0$.

La seconda delle (5.2) pone invece che sia $A = \frac{\sqrt{\Pr}}{\sqrt{\pi}}$.

Si può allora asserire che $t = Erf\,(\sqrt{\Pr}\,\frac{\eta}{2})$.

Allegato C

Si vuole determinare il campo di temperatura in un dominio solido semi-infinito con una temperatura iniziale uniforme pari a T_i al quale si impone all'istante 0 ,istantaneamente, una temperatura T_0 . Il set di equazioni che descrive il fenomeno è

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{dT}{dt} \\
&T(x,0) = T_i \\
&T(0,t) = T_0 \\
&T(\infty, t>0) = T_i
\end{aligned} \tag{6.1}$$

In seguito all'introduzioni di grandezze adimensionali così definite

$$\vartheta = \frac{T - T_i}{T - T_0};$$

$$\xi = \frac{x}{X_{rif}};$$

$$\tau = \frac{t}{t_{rif}};$$

il set di equazioni (6.1) può scriversi nella forma seguente:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\xi\xi} = \vartheta_\tau \\
&\vartheta(0,\tau) = 1 \\
&\vartheta(\infty,\tau) = 0 \\
&\vartheta(\xi,0) = 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Non essendo il sistema lineare non è possibile ricorrere al metodo di separazione delle variabili; si fa uso del **metodo delle soluzioni simili:** la soluzione $\vartheta(\xi,\tau)$ verrà ricercata come funzione della sola variabile s**,**variabile di similitudine, legata alle ξ e τ . Scelta la variabile di similitudine $s = \xi f(\tau)$ risulta:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_\xi = \vartheta_s s_\xi = \vartheta' f(\tau) \\
&\vartheta_{\xi\xi} = (\vartheta_\xi)_\xi s_\xi = \vartheta'' f^2(\tau)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

e ancora

$$\vartheta_{\tau} = \vartheta_{s} s_{\tau} = \vartheta' \xi f'(\tau) = \vartheta' \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} s \tag{6.4}$$

Sostituendo nella PDE di (6.2) si ottiene: $\vartheta'' f^{2}(\tau) = \vartheta' \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} s$

Riarrangiando i termini nel modo seguente:

$$\frac{\vartheta''}{\vartheta' \cdot s} = \frac{f'(\tau)}{f^{3}(\tau)} \tag{6.5}$$

si osserva che richiedere che l'equazione differenziale risulti solo nelle variabili ϑ e s ,implica che il gruppo $\frac{f'(\tau)}{f^{3}(\tau)}$ sia una costante. Se $\frac{f'(\tau)}{f^{3}(\tau)} = \pm c^{2}$ l'equazione del bilancio diventa una ODE del secondo ordine che richiede perciò 2 condizioni. Affinché siano esattamente 2 le condizioni al contorno deve essere

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 1 \\ \vartheta(\infty) &= 0 \\ f(0) &= \infty \end{aligned} \tag{6.6}$$

Grazie alla terza delle (6.6) si riesca a caratterizzare la funzione $f(\tau)$,infatti integrando l'equazione $\frac{f'(\tau)}{f^{3}(\tau)} = \pm c^{2}$ si ottiene :

$$-\frac{1}{2 f^{2}(\tau)} = \pm c^{2} \tau$$

Si osserva che la costante deve essere $-c^{2}$ perché la $f(\tau)$ sia reale.La funzione $f(\tau)$ è così esplicitata:

$$f(\tau) = \frac{1}{c\sqrt{2\tau}} \tag{6.7}$$

Il risultato è indipendente da c^{2}, che è quindi inessenziale e posta uguale a 2.
Si risolve ora l'equazione (6.5). Ponendo $p = \vartheta'$ si ottiene:

$$p' = -c^{2} p \cdot s$$

integrandola si ha:

$$p = A e^{-c^{2} \frac{s^{2}}{2}}$$

e sostituendo $p = \vartheta'$:

$$\vartheta = A \int_{0}^{s} e^{-\frac{c^{2} s^{2}}{2}} ds + B \tag{6.8}$$

Il risultato è indipendente da c^2, che è quindi inessenziale e posta uguale a 2.

Si impone ora all'equazione (6.8) di rispettare le condizioni (6.6). La prima delle (6.6) vincola la costante B ad assumere il valore 1; la seconda delle (6.6) vincola la costante A ad assumere il valore $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. In buona sostanza la funzione ricercata è:

$$\vartheta = \vartheta(s) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-s^2} ds \qquad (6.9)$$

o funzione complementare degli errori: $Erfc(s)$.