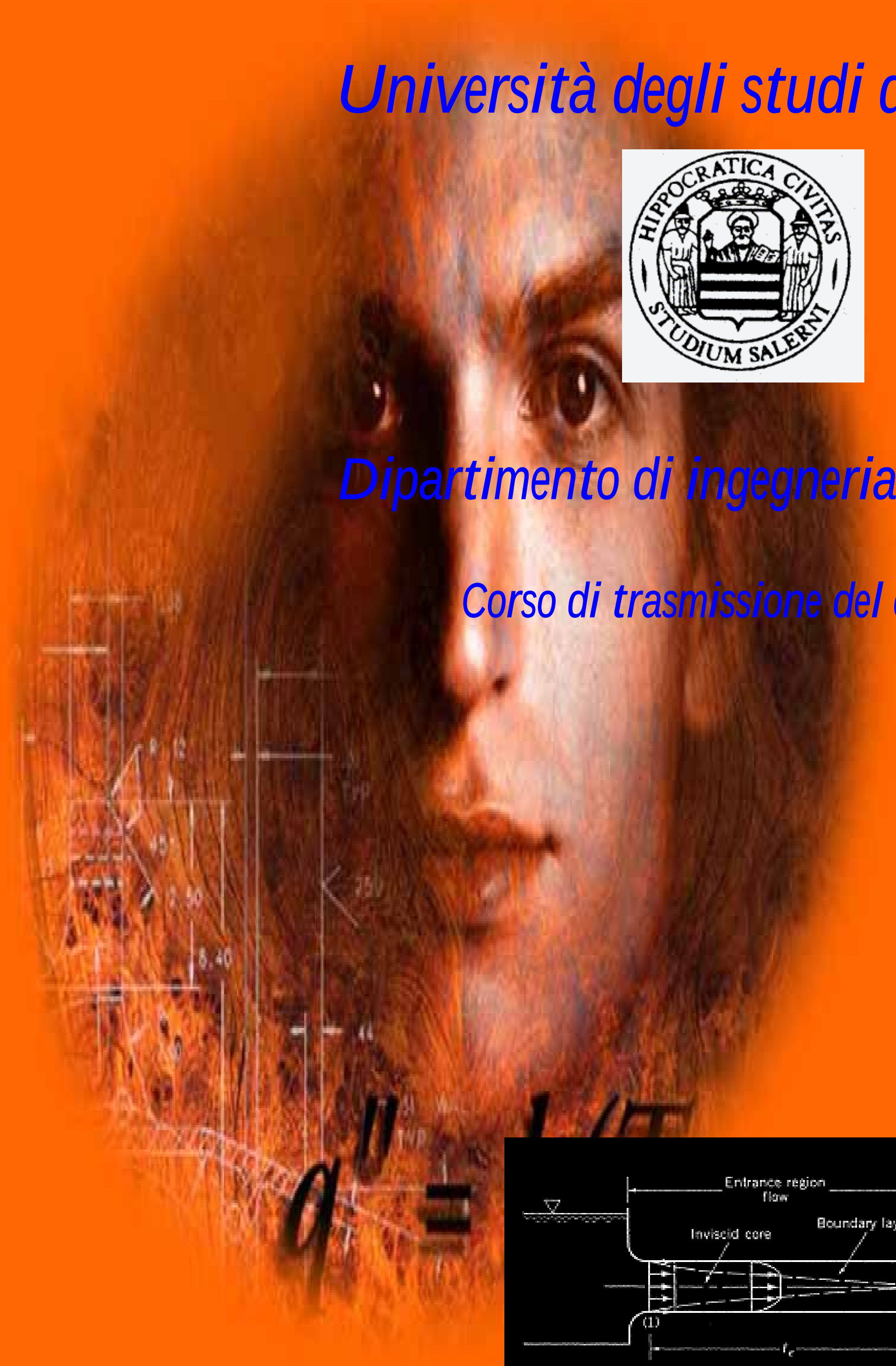
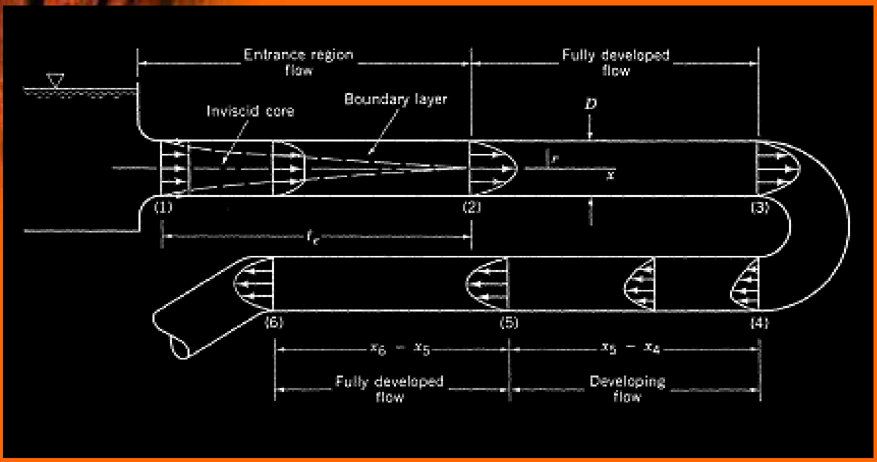
Università degli studi di Salerno



Dipartimento di ingegneria meccanica

Corso di trasmissione del calore



Tesina n. 16/B **a.a. 2002/2003**

A cura di:
Lucio Durso
Adriano Testa

Docente:
Prof. Gennaro Cuccurullo

Tesina n. 16B

Il progetto di una serpentina per il raffreddamento di una scheda elettronica che deve funzionare a 30°C richiede l'utilizzo di una tubazione di rame di diametro pari a 0.5cm e di lunghezza totale pari a 4 m. Si prevede che l'acqua fluisca nella tubazione alla velocità di 0.1m/s.

Trascurando la resistenza termica del tubo in rame e la curvatura della serpentina (i.e. il tubo venga assunto diritto) e sapendo che l'acqua entra a 20°C:

1 – verificare che è corretto assumere che il flusso sia completamente sviluppato dinamicamente

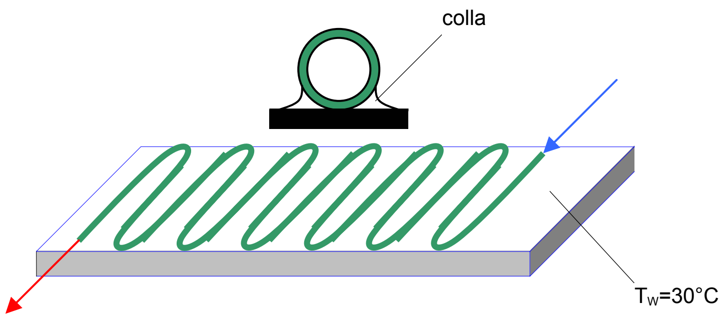
2 – calcolare la perdita di carico lungo la tubazione

3 - verificare che è corretto assumere che il flusso sia completamente sviluppato termicamente

4 - calcolare la temperatura bulk di uscita

6 – calcolare la temperatura sull'asse all'uscita

5 – calcolare la quantità totale di calore asportata dall'acqua



Considerazioni preliminari

Il caso proposto rientra nello studio della convezione interna.Per tali problemi invochiamo le equazioni dimensionali di Navier-Stokes in coordinate cilindriche ,data la geometria del problema.

$$U_X + \frac{(RV)_R}{R} = 0$$

Bilancio di massa

$$(UU_X + VU_R) = -\frac{P_X}{\rho} + \nu(U_{XX} + \frac{(RU_R)_R}{R})$$

Bilancio della q.tà di moto nella direzione X.

$$(UV_X + VU_R) = -\frac{P_Y}{\rho} + \nu(V_{XX} + \frac{(RV_R)_R}{R} - \frac{V}{R^2})$$

Bilancio della q.tà di moto nella direzione R.

Nella ipotesi di lavorare nella zona completamente sviluppata ($X>L_{id}$),conducendo una adimensionalizzazione delle equazioni del tipo:

$$x = \frac{X}{X_{rif}} \qquad u = \frac{U}{\overline{\overline{U}}} \qquad p = \frac{P}{P_{rif}}$$

$$r = \frac{R}{R_0} \qquad v = \frac{V}{V_{rif}}$$

si perviene ai seguenti risultati notevoli:

$$X_{rif} = \frac{\mathrm{Re}_D\, D}{4}$$

$$V_{rif} = \frac{\overline{U} D}{X_{rif}\, 2}$$

$$P_{rif} = \rho \overline{U}^2$$

La adimensionalizzazione fornisce le equazioni:

1) $u_x + v_r = 0 \rightarrow \textit{poichè}\; V_{rif} \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow 0 \Rightarrow u_x = 0 \left(\frac{\overline{U}}{X_{rif}} = \frac{V_{rif}}{R_0} \Rightarrow V_{rif} = \frac{\overline{U}}{X_{rif}} \frac{D}{2} \leq \frac{\overline{U} D}{L_{id}\, 2} = \frac{D}{2} \frac{100}{4 \mathrm{Re}_D} \cong \frac{10 D}{\mathrm{Re}_D} \right.$

Quanto più $X_{rif} > L_{id}$ tanto più $V_{rif} \rightarrow 0$)

2) $p_x = \frac{(r u_r)_r}{r} \Rightarrow \boxed{\textit{da considerazioni aggiuntive sul binomio di Bernoulli } \frac{dp}{dx} < 0}$

3) $p_r = 0$

Inoltre la integrazione della 2) fornisce la corrente di Poisseille:

u(r)= $-p_x(1-r^2) = 2(1-r^2)$

condizioni al contorno:
1) $u'(r=0)=0$
2) $u(r=1)=0$

La determinazione di p_x avviene facilmente se si valuta la $\dot{m}$ nella generica sezione(e comunque nella zona a $X>L_{id}$)

$$\dot{m} = \int \rho U(R) 2\pi R dR = \rho \overline{U} \pi R_0^{\,2} \quad da \quad cui \quad guardando\ 1^0\ e\ 2^0\ membro:$$

$$\int_0^1 u(r) r dr = \frac{1}{2} \quad e\ sostituendo\ u(r)\ si\ ricava:$$

$$p_x = -8$$

RIEPILOGO INPUT DEL PROBLEMA:

D=0.5 cm; $\overline{U} = 0.1\, m/s$;

T_w = 30 °C ; T_i = 20 °C;

L = 4 m;

Risposta quesito 1

Dalla soluzione di Blasius si ricava :

$$\eta^* \Leftrightarrow \eta \ni u'(\eta) = 0.99 \quad \eta^* = 4.92$$

$ma \quad essendo:$

$$\eta^* = \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{Y}{\Delta}\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{X}} = \frac{Y\sqrt{L}}{L\sqrt{X}}\sqrt{\mathrm{Re}} = \frac{Y\sqrt{L}}{L\sqrt{X}}\frac{\sqrt{LU_\infty}}{\sqrt{\nu}} \xleftrightarrow{*\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{X}}} \eta^* = \frac{Y}{X}\sqrt{\mathrm{Re}\, X}$$

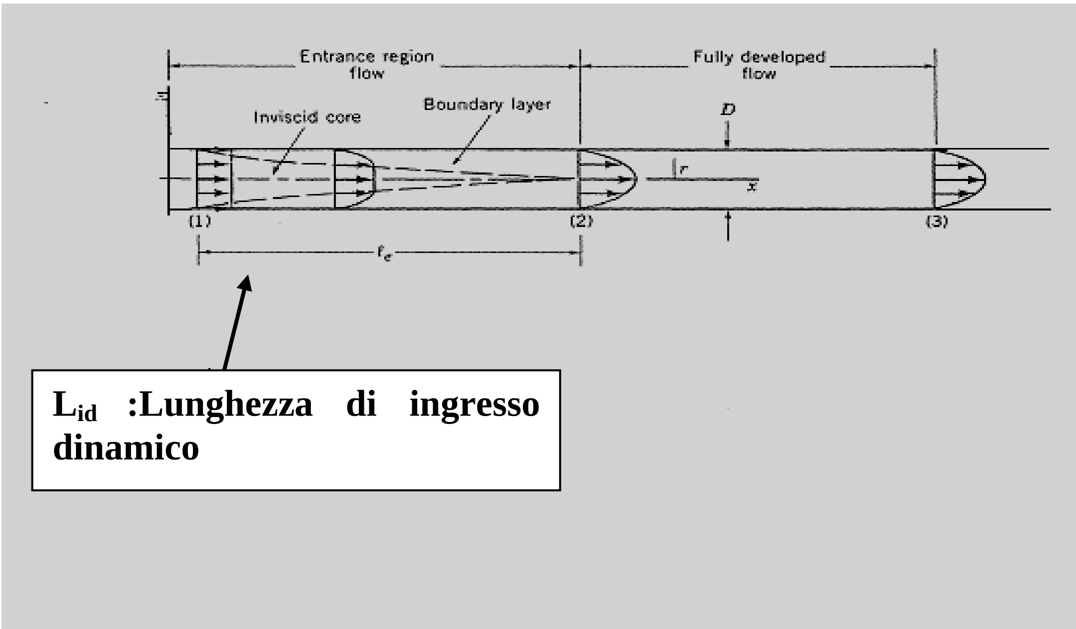
ma, essendo per η=η*, Y=Δ(X), e:

$$L_{id} \Leftrightarrow L \ni' \Delta(X) = \frac{D}{2} \Leftrightarrow 4.92 = \frac{D}{2 * L_{id}} \sqrt{\mathrm{Re}_{Lid}} \Rightarrow 5L_{id} \approx \frac{D}{2} \frac{\sqrt{\overline{U} L_{id}}}{\sqrt{\nu}} \xleftrightarrow{*\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{D}}} 5L_{id} = \frac{\sqrt{D}}{2} \sqrt{L_{id}} \sqrt{\mathrm{Re}_D}$$

da cui, isolando L_{id} risulta:

$$L_{id} = 4 \frac{\mathrm{Re}_D}{100} D = 0.04 \frac{\sqrt{UD}}{\sqrt{\nu}} D = 0.89D = 4{,}47mm < \text{Lunghezza Tubo} = 4\text{m};$$

Dal valore riscontrato possiamo affermare che è corretto assumere che il flusso si sviluppi completamente dal punto di vista dinamico ,si perviene quindi a una u funzione della sola r.



Risposta quesito 2

Riprendendo la relazione $p_x = -8$ è possibile scrivere,rendendo l'espressione dimensionale:

$$X_{rif} = \frac{\mathrm{Re}_D\, D}{4}$$

$$\frac{X_{rif}}{P_{rif}}\frac{dP}{dX} = -8 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{\Delta X} = 8\frac{\rho \overline{U}^2}{\frac{D}{4}\mathrm{Re}_D} = 32\frac{\rho \overline{U}}{D}\frac{\nu}{\overline{U}D} = 32\frac{\rho \overline{U}\nu}{D^2} = 16\ Pa$$

$$P_{rif} = \rho \overline{U^2}$$

Risposta quesito 3

Stime sulla Lunghezza di ingresso termica forniscono il seguente risultato notevole:

$$\frac{D}{2} = L_{it}\,\mathrm{Re}_{L_{it}}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}} = L_{it}\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{U}\sqrt{L_{it}}}\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{D}}\frac{\sqrt{L_{it}}}{\sqrt{L_{it}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{D}}{2} = \mathrm{Re}_D^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{L_{it}} \Rightarrow \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{L_{it}}} = 2\,\mathrm{Re}_D^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{L_{it}}}{\sqrt{D}} = \frac{\mathrm{Re}_D^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{2}}}{2} \Rightarrow \frac{L_{it}}{D} = \frac{1}{4}\mathrm{Re}_D\,\mathrm{Pr} = 30.7\ mm$$

Allo stesso risultato si perviene osservando che le lunghezze di ingresso sono relazionate dal numero di Pr:

$$\frac{L_{it}}{L_{id}} = \mathrm{Pr} < Lunghezza\,Tubo = 4m$$

Dal valore riscontrato possiamo affermare che è corretto assumere che il flusso si sviluppi completamente dal punto di vista termico .

Risposta quesito 4

Da un bilancio di energia convetta attraverso la generica sezione è possibile ricavare l'espressione della T_b (temperatura adiabatica di tazza):

$$E = \dot{m} c T_b = \int dE = \int_A d\dot{m}\, c T_b = \int_0^{R_0} \rho 2\pi R U dR\, cT \quad \Rightarrow T_b(X) = \frac{\int_0^{R_0} \rho 2\pi R U dR\, cT}{\rho \pi R_0^{\,2} \overline{U}\, cT}$$

$$\Rightarrow T_b(X = 0) = \overline{U} T_i \frac{\int_0^{R_0} 2RdR}{\overline{U} R_0^{\,2}} = T_i = 20°C$$

La relazione ricavata va utilizzata come condizione al contorno per ricavare la T_b all'uscita:

Infatti:

$$T_W = \cos t$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial X} = \frac{4\dot{q}}{\rho c \overline{U} D} \Rightarrow \frac{d(T_b - T_w)}{dX} = -\frac{4\alpha((T_b - T_w)}{\rho c \overline{U} D} \Rightarrow T_b(X) = T_w + Cost\ e^{-\frac{4\alpha}{\rho c \overline{U} D} X} = T_w + (T_i - T_w) e^{-\frac{4\alpha}{\rho c \overline{U} D} X}$$

$$\Rightarrow T_b(X = L) = T_w + (T_i - T_w) e^{-\frac{4\alpha}{\rho c \overline{U} D} L} = 29.65°C$$

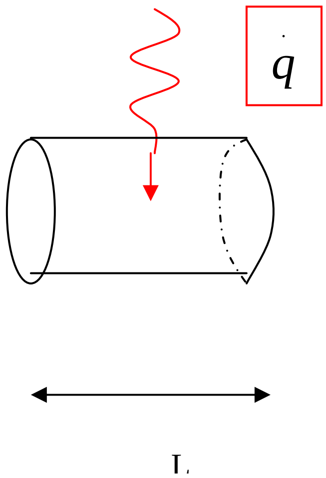
$$\frac{4\alpha}{\rho c \overline{U} D} L = 3.34$$

e dove si è assunto che $\alpha = 437\ W/K\ essendo \quad Nu = \frac{\alpha D}{k}$

Risposta quesito 5

Eseguendo un bilancio di energia su due sezioni a distanza L=4 m:

:



$\dot{Q} = \dot{m} c \Delta T_b = \dot{m} c [T_b(X=0) - (T_b(X=L)] = \rho \pi R_0{}^2 \overline{U} c [T_b(X=0) - (T_b(X=L)] =$ 0.80 W/s

Risposta quesito 6

Il calcolo della temperatura sull'asse all'uscita implica la determinazione del valore della temperatura adimensionale ϑ cosi definita(nella ipotesi che X>$L_{i,t}$):

$$\vartheta = \frac{T - T_w}{T_b - T_w} = \vartheta(r)$$

L'equazione su cui lavorare è l'equazione dell'energia in forma adimensionale:

$$2ru\vartheta(-Nu) = (r\vartheta')_r \qquad \text{con} \quad u = 2(1-r^2)$$

che va integrata numericamente utilizzando il metodo delle approssimazioni successive:

il metodo consiste nell'assegnare a ϑ un profilo arbitrario e a esplicitare il Nu come:

$$Nu = -2\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\Big|_{r=1}$$

Si ottiene in questo modo una equazione integrabile analiticamente che fornirà una nuova espressione di ϑ; a questo punto occorre valutare il Nu .Il metodo va iterato finchè Nu rimane costante.
Si riporta la routine realizzata con il programma "Mathematica":

- Step 1

$$t[r\_] = -\frac{3\,Nu}{8} + 2\,Nu\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16}\right);$$

```
a[r_, Nu_] = (1/r) * Integrate[2*r * (1 - r^2) * Nu * t[r], {r, 0, r}]
```

$$\frac{2\,Nu\left(-\frac{3\,Nu\,r^2}{16} + \frac{7\,Nu\,r^4}{32} - \frac{5\,Nu\,r^6}{48} + \frac{Nu\,r^8}{64}\right)}{r}$$

```
b[r_, Nu_] = Integrate[a[r, Nu], {r, 0, r}]
```

$$2\,Nu\left(-\frac{3\,Nu\,r^2}{32} + \frac{7\,Nu\,r^4}{128} - \frac{5\,Nu\,r^6}{288} + \frac{Nu\,r^8}{512}\right)$$

```
to = -Evaluate[b[1, Nu]]
N[to]
t[r_, Nu_] = b[r, Nu] + to
```

$$\frac{251\,Nu^2}{2304}$$

$$0.108941\,Nu^2$$

$$\frac{251\,Nu^2}{2304} + 2\,Nu\left(-\frac{3\,Nu\,r^2}{32} + \frac{7\,Nu\,r^4}{128} - \frac{5\,Nu\,r^6}{288} + \frac{Nu\,r^8}{512}\right)$$

```
c[r_, Nu_] = ∂r t[r, Nu]
d[Nu_] = -2 Evaluate[c[1, Nu]]
```

$$2\,Nu\left(-\frac{3\,Nu\,r}{16}+\frac{7\,Nu\,r^{3}}{32}-\frac{5\,Nu\,r^{5}}{48}+\frac{Nu\,r^{7}}{64}\right)$$

$$\frac{11\,Nu^{2}}{48}$$

```
NSolve[Nu - 11 Nu^2/48 == 0, Nu]
```

```
{{Nu → 0.}, {Nu → 4.36364}}
```

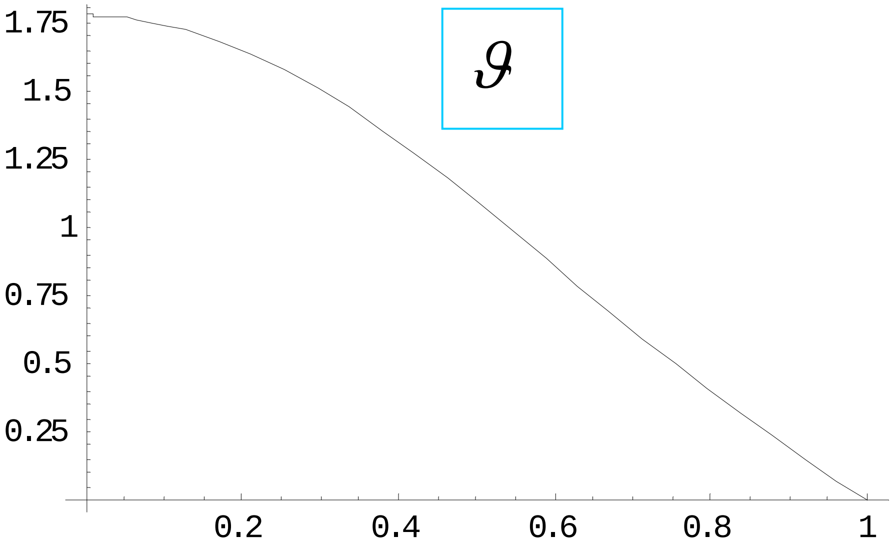
Dopo lo step 7 giungiamo a Nu = 3.71338 e a una espressione di $\vartheta(r)$ che sull' asse restituisce un valore pari a: 1.78

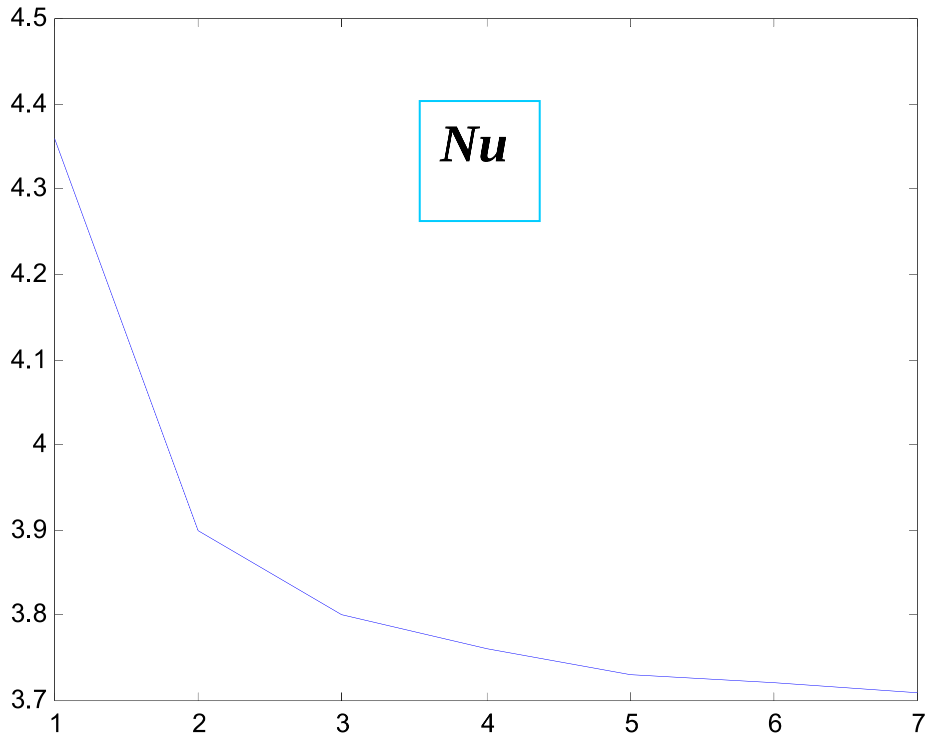
Conseguentemente è determinata la temperatura richiesta all'uscita dal condotto sull'asse:

$$T(x=L, r=0) = T_w + \vartheta(0)(T_b - T_W) = 30 + 1.78(29.65 - 30) = 29.37°C$$

Il risultato trovato per altro sembra coerente con il valore della T_b all'uscita che prevedeva un valore molto vicino alla temperatura della parete T_w.

Di seguito si riporta il grafico della ϑ e la variazione del Nu nelle iterazioni eseguite:





.

***Step* = [1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7]**

***Nu* = [4.36, 3.90, 3.80, 3.76, 3.73, 3.72, 3.71]**

Dopo poche iterazioni il Nu si stabilizza su un valore prossimo a 3.66 ,valore contemplato anche in “letteratura”.