

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI SALERNO

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (L.S.)



**Tesina di TRASMISSIONE DEL CALORE
A.A. 2005/2006**

Studio di una aletta piana a sezione circolare

Docente:

Ch.mo Prof. G. Cuccurullo

Candidati:

Landi Michele 06203/00016

Noschese Giuseppe 06203/00017

Testo del lavoro assegnato

Si determini la soluzione in serie $T=T(x,R)$ per una aletta piana a sezione circolare di lunghezza finita la cui estremità sia adiabatica e con condizione al contorno di III tipo.

Si compari l'efficienza riferita a tale soluzione 2D con quella corrispondente all'ipotesi di aletta 1D. Si discuta il risultato al variare del rapporto raggio/altezza dell'aletta.

Suggerimento: la soluzione è esprimibile in termini di funzioni di Bessel.

Introduzione e contestualizzazione

Consideriamo l'espressione del flusso di calore scambiato da un solido con un fluido in riferimento all'analogia elettrica:

sia T_0 la temperatura di una parete e T_∞ la temperatura del fluido
$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_\infty}{\sum R_i} = AU(T_0 - T_\infty)$$

avendo definito la conduttanza termica U come $U = \frac{1}{A \sum R_i}$ ed A è la superficie di scambio solido-fluido.

Da questa espressione ci si rende conto che per aumentare il flusso di calore è necessario aumentare l'area di scambio e nasce così l'idea di creare protrusioni sul corpo solido da raffreddare e tali protrusioni sono dette alette. In effetti bisogna fare i conti con aspetti concorrenti a quello messo ora in luce e che rendono complicato lo studio di un'applicazione di scambio termico con alettatura; ad esempio si potrebbe pensare di creare alette di area sempre maggiore vista la diretta proporzionalità tra A e \dot{Q} però le alette hanno una propria resistenza conduttiva che provoca una caduta di temperatura lungo l'aletta che è dannosa nel senso che la driving force, che governa lo scambio termico, si riduce.

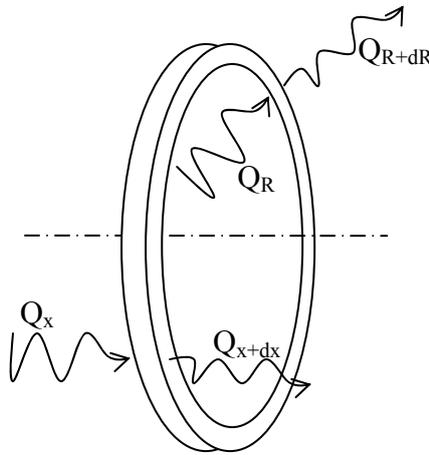
Quindi il nostro obiettivo è dare una misura al beneficio che si ottiene introducendo delle protrusioni su un solido base ed avere così successivamente la possibilità di dire fin dove è conveniente spingersi con l'altezza delle alette.

In riferimento a questo discorso ci si accinge, in tale lavoro, alla caratterizzazione di alette di geometria fissata, cilindrica, ed in particolare ci si concentrerà su un modello bidimensionale per la caratterizzazione del campo termico nella protrusione da confrontare con i risultati forniti da un modello monodimensionale.

Modello bidimensionale

Bilancio di energia sul volume elementare di aletta in assenza di generazione ed in condizioni stazionarie

Come detto la geometria di riferimento è quella cilindrica in cui la bidimensionalità è assicurata dalla indipendenza del campo di temperatura dalla coordinata trasversale e quindi $T=T(x,R)$; ritagliamo un volume elementare come da figura:



Il bilancio di energia per questo volume si scrive: $\dot{Q}_x + \dot{Q}_R = \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_{R+dR}$; ovviamente l'aver fatto riferimento al campo di temperatura, laddove la nostra attenzione è principalmente rivolta allo scambio termico cioè \dot{Q} , è giustificata dal legame che sussiste tra queste due quantità. Nel problema specifico invociamo la legge di Fourier: $\dot{Q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} 2\pi R dR$ e $\dot{Q}_R = -k \frac{\partial T}{\partial R} 2\pi R dx$;

ovviamente sarà anche $\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx$ e $\dot{Q}_{R+dR} = \dot{Q}_R + \frac{\partial \dot{Q}_R}{\partial R} dR$; mettendo tutto insieme si ha

$$\frac{\partial \dot{Q}_R}{\partial R} dR + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(k \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} 2\pi R dx + k \frac{\partial T}{\partial R} 2\pi dx \right) dR + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} 2\pi R dR dx = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial (RT_R)}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

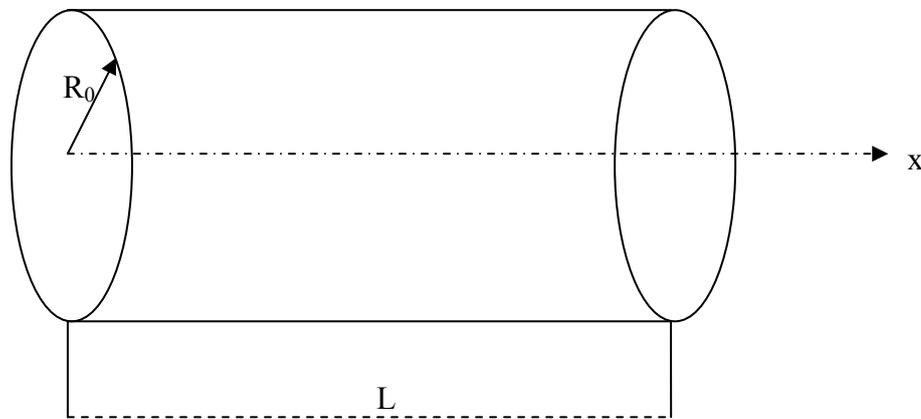
L'equazione che dobbiamo risolvere è quella di Laplace bidimensionale; del resto si poteva arrivare a tale conclusione partendo dalla equazione fondamentale della conduzione e particolarizzandola al caso di assenza di generazione ed in condizioni stazionarie. Si avrebbe immediatamente l'equazione

di Laplace $\nabla^2 T = 0$ che, scritta in coordinate cilindriche e per T indipendente dalla coordinata trasversale, si traduce nella equazione poco sopra scritta.

Caratterizzazione matematica del problema dimensionale

L'equazione da risolvere è differenziale, alle derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti.

L'ordine di derivazione rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti è due ed, in quanto ciò, c'è bisogno di quattro condizioni al contorno per chiudere il problema. Per chiarezza fissiamo l'origine per ciascuna delle due coordinate:



Ovviamente ad $x=0$ ci troviamo sul corpo da dove si principia la protrusione e per questo possiamo pensare di fissare la temperatura per questa sezione, ovvero detta T_0 la temperatura del corpo scriviamo $T(0, R) = T_0$; all'estremità opposta ci viene suggerito di considerare adiabatica la sezione

ad $x=L$ e per questo il campo di temperatura sarà tale per cui $\frac{\partial T}{\partial x}(L, R) = 0$. Lungo la coordinata R

dobbiamo imporre, per questioni di assialsimmetria del profilo di temperatura, che $\frac{\partial T}{\partial R}(x, 0) = 0$;

l'ultima informazione da sfruttare riguarda il fatto che sulla superficie cilindrica lo scambio termico

per conduzione deve uguagliare lo scambio termico per convezione: $-k \frac{\partial T}{\partial R}(x, R_0) = h(T(x, R_0) - T_\infty)$.

Riepiloghiamo il problema dimensionale da risolvere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \frac{\partial(RT_R)}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ T(0, R) = T_0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(L, R) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial R}(x, 0) = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial R}(x, R_0) = h(T(x, R_0) - T_\infty) \end{array} \right.$$

Caratterizzazione matematica del problema adimensionale

La necessità di dover descrivere le varie grandezze in gioco nel problema in questione attraverso entità slegate dalla scala dimensionale con la quale vogliamo misurarle ci è suggerita dal fatto che il problema dimensionale dipende da più parametri quali T_0 , k , h , R_0 , L che ci rendono difficile trarre delle conclusioni, sul modello che stiamo trattando, che siano il più generali possibile, in modo tale da poterle confrontare con quelle che si traggono usando altri modelli.

Infatti uno dei pregi dell'adimensionalizzazione è proprio quello di far palesare dei gruppi di parametri (essi stessi adimensionali) attraverso i quali si caratterizzano più problemi dimensionali; un altro pregio sta poi nel fatto che si riescono ad assorbire delle inomogeneità rendendo possibile l'utilizzo di certi strumenti matematici per la risoluzione del problema differenziale.

Stante tutto ciò procediamo in ragione delle seguenti quantità adimensionali: $\xi = \frac{x}{L}$, $r = \frac{R}{R_0}$,

$$\mathcal{G}(\xi, r) = \frac{T(x, R) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}; \text{ problema adimensionale: } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_{\xi\xi} + \frac{L^2}{R_0^2} \frac{(r\mathcal{G}_r)_r}{r} = 0 \\ \mathcal{G}(0, r) = 1 \\ \mathcal{G}_\xi(1, r) = 0 \\ \mathcal{G}_r(\xi, 0) = 0 \\ \mathcal{G}_\xi(\xi, 1) = -Bi\mathcal{G}(\xi, 1) \end{array} \right.$$

Risoluzione del problema differenziale adimensionale

Si sono in effetti palesati i vantaggi menzionati prima: il gruppo $\frac{hR_0}{k}$ lo abbiamo chiamato “Bi” che sta per “numero di Biot” e che definisce, a seconda dei valori che assume nel problema specifico, la conduzione termica dell’aletta nel senso radiale; risultati noti dicono che per Bi “piccoli” il salto di temperatura si smaltisce prevalentemente nel fluido rendendo indipendente il campo termico, nel solido, dal raggio; per Bi “grandi” invece si smaltisce il salto di temperatura prevalentemente nel solido. In effetti tale risultato può leggersi immediatamente se si richiama in causa l’analogia elettrica e con essa i concetti di resistenza termica conduttiva e convettiva; in tal

caso il numero di Biot può scriversi come $Bi = \frac{\frac{R_0}{kA}}{\frac{1}{hA}} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}}$ e da qui possono principiarsi le

conclusioni tratte in precedenza. L’altro vantaggio dell’adimensionalizzazione effettuata è stato quello di ridurre le inomogeneità che è ora presente solo in corrispondenza della condizione al contorno che vuole fissare la temperatura alla base dell’aletta, laddove il problema dimensionale ne proponeva una ulteriore in corrispondenza della condizione di III tipo; si noti che se avessimo scelto diversi riferimenti per adimensionalizzare il salto di temperatura, ad esempio $\mathcal{G}(\xi, r) = \frac{T(x, R) - T_0}{T_\infty - T_0}$,

la inomogeneità sarebbe rimasta unica ma si sarebbe portata sulla condizione di III tipo. Quest’ultimo aspetto è determinante poiché, essendoci tutte le buone premesse necessarie per l’utilizzo del metodo di separazione delle variabili, ci troveremmo in un caso a costruire un problema di autofunzioni nella “direzione di r ” e, nell’altro caso, il problema di autofunzioni dovremmo ricercarlo nella “direzione di ξ ”. Procediamo pertanto con la prima adimensionalizzazione e ricerchiamo una soluzione del tipo $\theta(\xi, r) = X(\xi)R(r)$ dove X ed R non devono essere confuse con le variabili indipendenti del problema dimensionale; per vedere che forma devono avere queste due funzioni dobbiamo sostituire nel problema di partenza:

$X''R + M^2 X \frac{(rR')_r}{r} = 0$ dove si è posto per comodità $M = \frac{L}{R_0}$; dividiamo tutto per XR ottenendo

così $\frac{X''}{M^2 X} + \frac{(rR')_r}{rR} = 0$. Quest’ultima uguaglianza può essere garantita solo quando ognuno dei

gruppi funzionali presenti è uguale ad una stessa costante con segno opposto; questo perché ognuno dei gruppi è funzione di una sola delle variabili indipendenti e, dovendo garantirsi l’uguaglianza per qualsiasi valori di r e ξ , non può che essere quanto stabilito testé.

Quindi si definiscono due sottoproblemi che sono lineari ed ordinari e si spera a maggior ragione

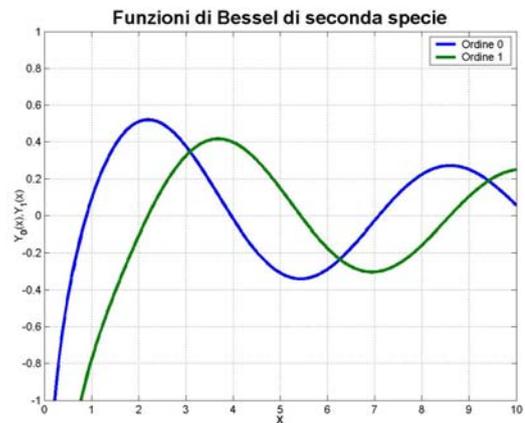
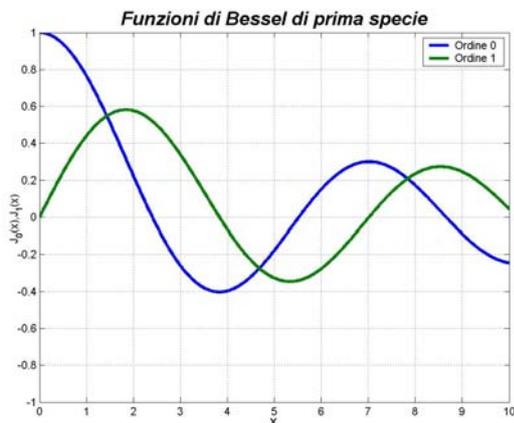
per essi di individuare una soluzione in forma chiusa:
$$\begin{cases} \frac{X''}{M^2 X} = C \\ \frac{(rR')_r}{rR} = -C \end{cases}$$
, resta da definire il segno da

attribuire alla costante C. Con C positivo il problema in r si chiude immediatamente facendo appello alle funzioni di Bessel mentre il problema in ξ si chiude facilmente in ogni caso; procediamo pertanto con questa scelta e sia $C = \lambda^2$.

Problema in ξ : la soluzione può esprimersi come combinazione di esponenziali reali $X(\xi) = C_1 e^{\lambda M \xi} + C_2 e^{-\lambda M \xi}$; lungo tale direzione non bisogna dimenticare che c'è comunque una condizione omogenea che "filtra" la $\theta(\xi, r) = X(\xi)R(r)$ e ricade solamente sulla X: $\mathcal{G}_\xi(1, r) = 0 \Rightarrow X'(1) = 0$; con tale condizione si riesce a scrivere $X(\xi) = C_1 (e^{-\lambda M \xi} + e^{\lambda M (\xi-2)})$.

Problema in r: si è fatto riferimento prima alle funzioni di Bessel ed in effetti la soluzione generale del problema $\frac{(rR')_r}{r} = -\lambda^2 R$ si scrive $R(r) = C_3 J_0(r\lambda) + C_4 Y_0(r\lambda)$ dove J_0 ed Y_0 sono le funzioni di

Bessel di prima e di seconda specie entrambe di ordine 0 il cui andamento è riportato in figura:



Come annunciato il fatto che lungo r il problema è totalmente omogeneo ci condurrà alla formulazione di una equazione caratteristica sulla quale poter inferire riguardo ai valori che può assumere la costante di separazione λ^2 ; pertanto applichiamo le due condizioni al contorno:

$\mathcal{G}_r(\xi, 0) = 0 \Rightarrow X(\xi)R'(0) = 0 \Rightarrow R'(0) = 0$ tenendo presente che le varie specie della funzione di Bessel legano ordini successivi attraverso semplici derivazioni ($J_0'(x) = -J_1(x), Y_0'(x) = -Y_1(x)$) e che $J_1(0) = 0, Y_1(x \rightarrow 0) = -\infty$ si ha che $C_4 = 0$;

$\mathcal{G}_r(\xi, 1) = -Bi \mathcal{G}_\xi(\xi, 1) \Rightarrow X(\xi)R'(1) = -Bi X(\xi)R(1) \Rightarrow R'(1) = -Bi R(1)$ sfruttando quanto trovato con l'altra condizione si riesce a scrivere $C_3 (\lambda J_1(\lambda) - Bi J_0(\lambda)) = 0$; per soddisfare questa uguaglianza avremmo la possibilità di annullare anche C_3 ma questo ci porterebbe ad una soluzione per

$\theta(\xi, r) = X(\xi)R(r)$ banale, che pure è soluzione del problema di Laplace che è omogeneo ma che a noi non interessa; infatti c'è la possibilità di soddisfare l'uguaglianza in questione ponendo $\lambda J_1(\lambda) - BiJ_0(\lambda) = 0$. Questa è l'equazione caratteristica di cui si parlava e dalla quale, fissato il numero di Biot, si estraggono infinite radici λ_n , visto il comportamento oscillante delle funzioni di Bessel; alle infinite radici si associano infinite soluzioni (autofunzioni) per $R(r)$ del tipo $R_n(r) = J_0(\lambda_n r)$. Non ci resta a questo punto che soddisfare la condizione non omogenea che resta e, se provassimo a prendere una qualsiasi delle infinite $R(r)$ otterremmo:

$\theta(0, r) = X(0)R(r) = C_1(1 + e^{-\lambda M^2})J_0(\lambda_n r) = 1$ abbiamo cioè una funzione in r che deve essere uguale ad una costante; questo non è possibile e pensiamo quindi di appellarci alla linearità del problema e prendere una combinazione lineare delle infinite autofunzioni per esprimere la soluzione per $R(r)$ e quindi

$\theta(\xi, r) = X(\xi)R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \{B_n J_0(\lambda_n r)(e^{-\lambda_n M \xi} + e^{\lambda_n M(\xi-2)})\}$; particolarizzando tale espressione

per $\xi=0$ ed uguagliando all'unità si ottiene una equazione con infinite incognite che sono le costanti B_n della combinazione:

$$\theta(0, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \{B_n J_0(\lambda_n r)(1 + e^{-\lambda_n M^2})\} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \{B_n J_0(\lambda_n r)(1 + e^{-\lambda_n M^2})rJ_0(\lambda_n r)\} = rJ_0(\lambda_n r) \text{ integriamo}$$

primo e secondo membro tra 0 ed 1:

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_m r)dr = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \{B_n J_0(\lambda_n r)(1 + e^{-\lambda_n M^2})rJ_0(\lambda_n r)\}dr = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1 + e^{-\lambda_n M^2}) \int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)J_0(\lambda_n r)dr.$$

Ortogonalità delle autofunzioni

C'è la possibilità di risolvere questa equazione, esplicitando per giunta ciascuno dei coefficienti; bisogna far riferimento al fatto che le autofunzioni sono ortogonali sull'intervallo $[0,1]$ con la funzione peso $w(r) = r$; per mostrare questa proprietà consideriamo due generiche autofunzioni $R_n(r) = J_0(\lambda_n r)$ ed $R_m(r) = J_0(\lambda_m r)$; ognuna di esse soddisfa il rispettivo problema differenziale:

$$\begin{cases} (rR_n')_r = -r\lambda_n^2 R_n \\ R_n'(0) = 0 \\ R_n'(1) = -BiR_n(1) \end{cases} \quad \begin{cases} (rR_m')_r = -r\lambda_m^2 R_m \\ R_m'(0) = 0 \\ R_m'(1) = -BiR_m(1) \end{cases}$$

Prendiamo le eqq. diff. di ciascun problema e moltiplichiamole rispettivamente per $R_m(r)$ ed $R_n(r)$; sottraiamo membro a membro ottenendo $R_m(rR_n')_r - R_n(rR_m')_r = -rR_nR_m(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)$. Se si considera

che il primo membro può essere messo nella forma $\frac{d}{dr}(r(R_m R_n' - R_n R_m')) = -r R_n R_m (\lambda_n^2 - \lambda_m^2)$

possiamo facilmente procedere all'integrazione tra 0 ed 1: $R_m R_n' - R_n R_m' \Big|_0^1 = -(\lambda_n^2 - \lambda_m^2) \int_0^1 r R_n R_m dr$

$\Rightarrow R_m(1)R_n'(1) - R_n(1)R_m'(1) = -R_m(1)BiR_n(1) + R_n(1)BiR_m(1) = 0$; nel fare quest'ultimo passaggio si è chiamata in causa la condizione al contorno convettiva: il fatto che essa è omogenea ci permette di annullare il primo membro facendo emergere la proprietà di ortogonalità citata prima, che quindi si

formalizza scrivendo $\int_0^1 r J_0(\lambda_m r) J_0(\lambda_n r) dr = c_m \delta_{mn}$ dove $c_m = \int_0^1 r (J_0(\lambda_m r))^2 dr$; sostituendo a ritroso

si riescono ad esplicitare i vari coefficienti in questo modo: $B_m = \frac{\int_0^1 J_0(\lambda_m r) r dr}{\int_0^1 (J_0(\lambda_m r))^2 r dr} \frac{1}{(e^{-2\lambda_m M} + 1)}$.

Campo di temperatura dimensionale

In tal modo rispondiamo al primo quesito del lavoro assegnato: scrittura della soluzione in serie $T=T(x,R)$; infatti basta tener conto delle posizioni fatte in sede di adimensionalizzazione per poter

scrivere $T(x, R) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \mathcal{G}\left(\frac{x}{L}, \frac{R}{R_0}\right) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n J_0\left(\lambda_n \frac{R}{R_0}\right) \left(e^{-\lambda_n M \frac{x}{L}} + e^{\lambda_n M \left(\frac{x}{L} - 2\right)} \right) \right\}$.

Noto il campo di temperatura si riesce a definire, ad esempio, la potenza termica conduttiva che si smaltisce nell'aletta appellandosi alla legge di Fourier. A tal proposito si usa qualificare l'aletta in

riferimento alla efficienza definita come: $\eta = \frac{\dot{Q}_f}{2\pi R_0 L h (T_0 - T_\infty)}$; al numeratore troviamo la potenza

termica che si riversa nel fluido mentre la relazione al denominatore è la stessa potenza termica calcolata ipotizzando identicamente nulla la resistenza termica conduttiva (l'aletta è costantemente alla temperatura T_0 per tutta la lunghezza); possiamo esplicitare il numeratore e riscrivere tutto in

termini delle grandezze adimensionali: $\dot{Q}_f = -\int_0^L k \frac{\partial T}{\partial R}(x, R_0) 2\pi R_0 dx$; se riflettiamo sul fatto che

quanto smaltiamo attraverso la superficie cilindrica dell'aletta deve essere "passato" per forza di cose dalla base dell'aletta attaccata al solido da raffreddare possiamo anche scrivere

$\dot{Q}_f = -\int_0^{R_0} k \frac{\partial T}{\partial x}(0, R) 2\pi R dR$ adimensionalizzando si ha $\dot{Q}_f = -2\pi k \frac{(T_0 - T_\infty)}{L} R_0^2 \int_0^1 \mathcal{G}_\xi(0, r) r dr$

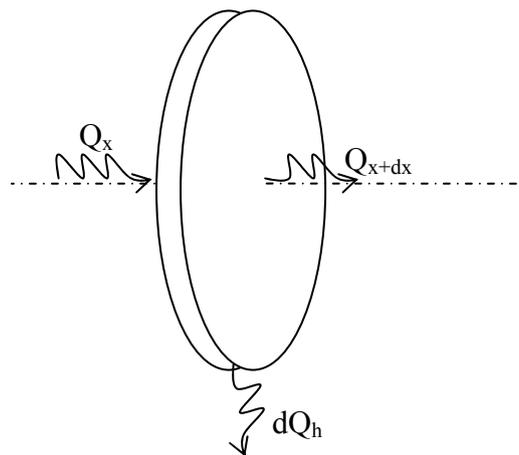
sostituendo nell'espressione dell'efficienza si ha: $\eta = \frac{-kR_0 \int_0^1 \mathcal{G}_\xi(0,r) r dr}{L^2 h} = -\frac{1}{Bi} \frac{1}{M^2} \int_0^1 \mathcal{G}_\xi(0,r) r dr$ ne

deriva quindi che $\eta = \eta(Bi, M)$ ossia si è resa palese la dipendenza dal rapporto lunghezza/raggio in riferimento al quale è richiesta la discussione del risultato; inoltre, essendo necessario anche il confronto con il modello monodimensionale procediamo ad esplicitare lo stesso.

Modello monodimensionale

Bilancio di energia sul volumetto

In questo caso il campo di temperatura resta funzione della sola coordinata longitudinale x lungo la quale si hanno i flussi di potenza termica:



Il bilancio si scrive $\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}_h$ ovvero, esplicitando i vari termini appellandosi alle leggi di Fourier, per la potenza termica conduttiva, e di Newton, per la potenza termica convettiva, si ottiene che il campo di temperatura deve soddisfare $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2h}{kR_0} (T(x) - T_\infty) = m^2 (T(x) - T_\infty)$.

Avere un campo di temperatura indipendente da R vuol dire assumere che in ogni sezione la temperatura è costante ovvero, partendo da un valore di temperatura sull'asse dell'aletta, ad una generica x , pari a $T_a > T_\infty$, si dice che il salto $T_a - T_\infty$ viene smaltito totalmente nel fluido. Ricordando quanto detto a proposito del numero di Biot si ha che l'ipotesi sulla quale si poggia la

monodimensionalità è $Bi = \frac{hR_0}{k} \ll 1$.

Caratterizzazione del problema dimensionale

Il problema differenziale da risolvere è ordinario, lineare, inomogeneo ed a coefficienti costanti; l'ordine massimo di derivazione è 2 e pertanto sono necessarie altrettante condizioni al contorno per chiudere il problema; per essere congruenti con il problema bidimensionale imponiamo la temperatura T_0 ad $x=0$ ed immaginiamo ancora adiabatica la sezione di aletta ad $x=L$. In definitiva

$$\text{il problema dimensionale è } \begin{cases} T_{xx} = m^2(T - T_\infty) \\ T(0) = T_0 \\ T_x(L) = 0 \end{cases} .$$

Caratterizzazione del problema adimensionale

Anche in questo caso riscriviamo il problema differenziale in ragione di quantità indipendenti dalla scala con cui si misurano le grandezze in gioco. Per cui poniamo $\xi = \frac{x}{L}$, $\vartheta(\xi) = \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ e da ciò:

$$\begin{cases} \vartheta_{\xi\xi} = m^2 L^2 \vartheta \\ \vartheta(0) = 1 \\ \vartheta_\xi(1) = 0 \end{cases} ; \text{ poiché nel problema bidimensionale siamo riusciti a porre tutto in funzione del}$$

numero di Biot Bi e del rapporto lunghezza/raggio M è opportuno esplicitare anche la dipendenza di

$$\text{questo problema da questi due gruppi: } m^2 L^2 = \frac{2h}{kR_0} L^2 = 2 \frac{hR_0}{k} \frac{L^2}{R_0^2} = 2BiM^2 .$$

Passando alla risoluzione del problema si ha $\vartheta(\xi) = C_1 e^{mL\xi} + C_2 e^{-mL\xi}$ che particolarizzata con le rispettive condizioni al contorno restituisce: $\vartheta(\xi) = \frac{\cosh(\sqrt{2BiM}(1-\xi))}{\cosh(\sqrt{2BiM})}$.

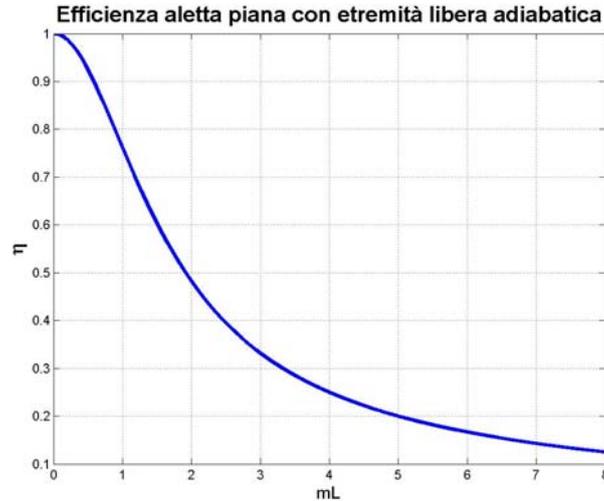
Campo di temperatura dimensionale

Richiamando le posizioni fatte al paragrafo precedente si ottiene immediatamente il campo di temperatura in forma dimensionale:

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \vartheta\left(\frac{x}{L}\right) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh\left(\sqrt{2BiM}\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right)}{\cosh(\sqrt{2BiM})}$$

Anche l'efficienza dell'aletta la si riesce a porre in forma chiusa: $\eta = \frac{\dot{Q}_f}{2\pi R_0 L h (T_0 - T_\infty)} = \frac{\text{tgh}(\sqrt{2BiM})}{\sqrt{2BiM}}$.

Possiamo graficare una volta per tutte questa efficienza in funzione del gruppo "ml":



Confronto dei due modelli

Convergenza della serie al variare del numero di termini considerati

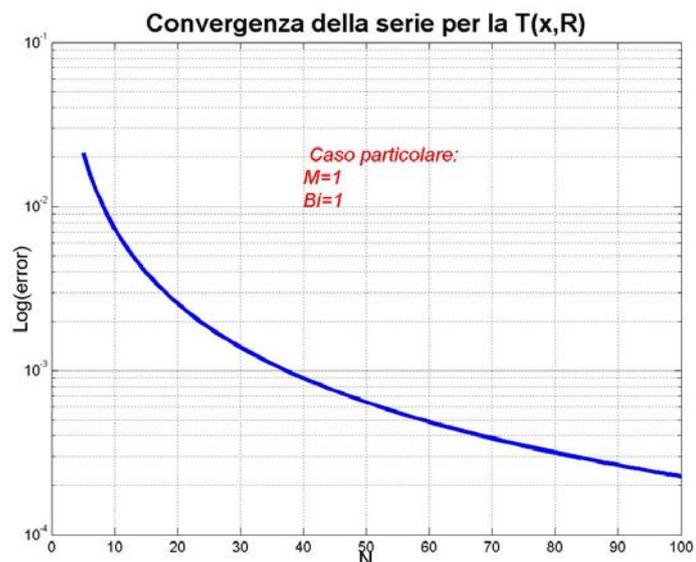
Abbiamo visto che la soluzione del problema bidimensionale si esprime come combinazione di infiniti termini che coinvolgono le autofunzioni del problema differenziale; tale necessità si è manifestata allo scopo di soddisfare l'unica condizione al contorno inhomogenea. È impensabile dover considerare, da un punto di vista numerico, infiniti termini; per questo costruiamo un grafico che metta in evidenza come si assottiglia l'errore che si commette sulla condizione in questione al crescere dei termini considerati:

Si è costruito il grafico considerando la soluzione:

$$\theta(0,0) = \sum_{n=0}^N \{B_n (1 + e^{-\lambda_n M^2})\}$$

variando N si è poi costruito l'errore considerando che dalle condizioni dovrebbe essere $\mathcal{G}(0,r) = 1$; per cui

$$error = |\mathcal{G}(0,0) - 1|.$$

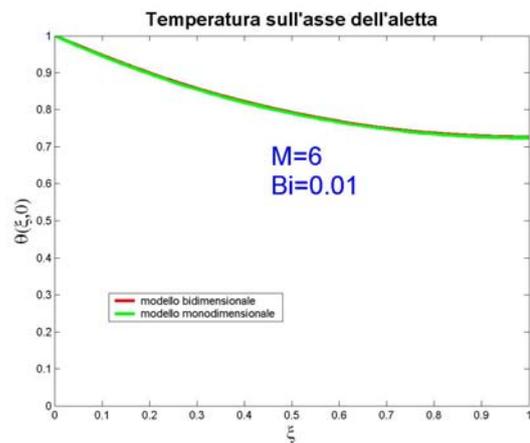
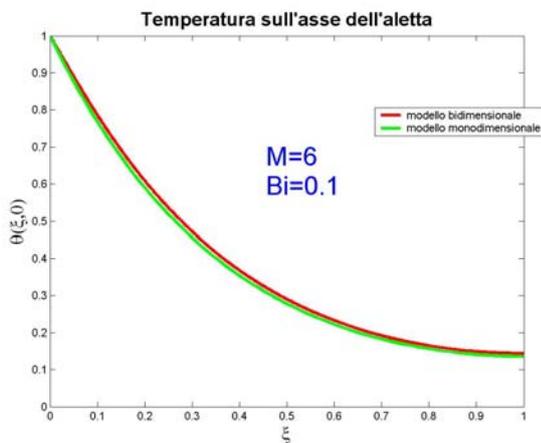
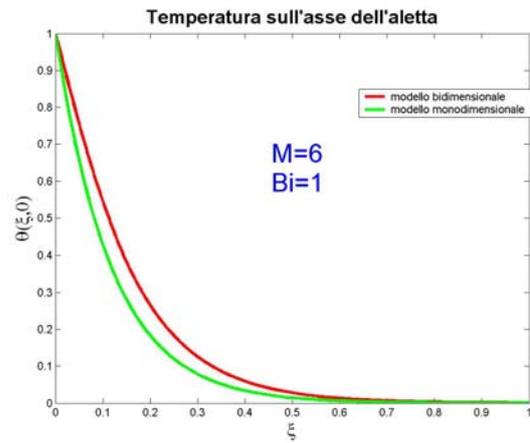
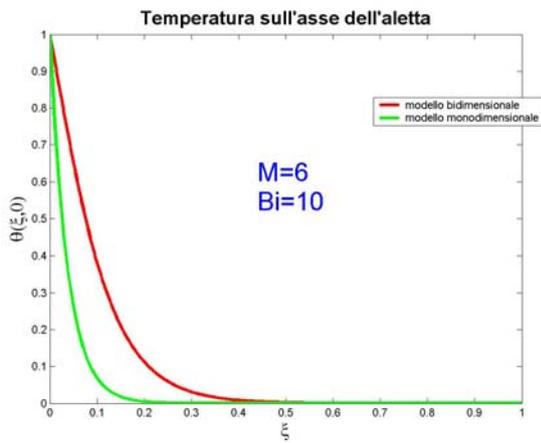


Bisogna considerare che in ogni caso laddove si voglia determinare il campo di temperatura per x non troppo piccole bastano pochi termini della serie per ottenere un risultato non molto differente, anzi “praticamente” uguale, da quello esatto. Questo è evidente guardando come è fatta la soluzione

$\theta(\xi, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \{B_n J_0(\lambda_n r)(e^{-\lambda_n M \xi} + e^{\lambda_n M (\xi-2)})\}$: l'ultimo termine tra parentesi tonde è sostanzialmente un esponenziale decrescente che ha tra gli argomenti la costante di separazione λ_n che, a sua volta, è una serie crescente e come tale porta praticamente a 0 il contributo dato alla serie esprimente la soluzione quando n vale 4÷5; ad esempio con $M=1, Bi=1, \xi=0.7$:

λ_n	1.2558	4.0795	7.1558	10.2710	13.3984
$e^{-\lambda_n M \xi} + e^{\lambda_n M (\xi-2)}$	0.6106	0.0625	0.0068	0.0008	0.0001

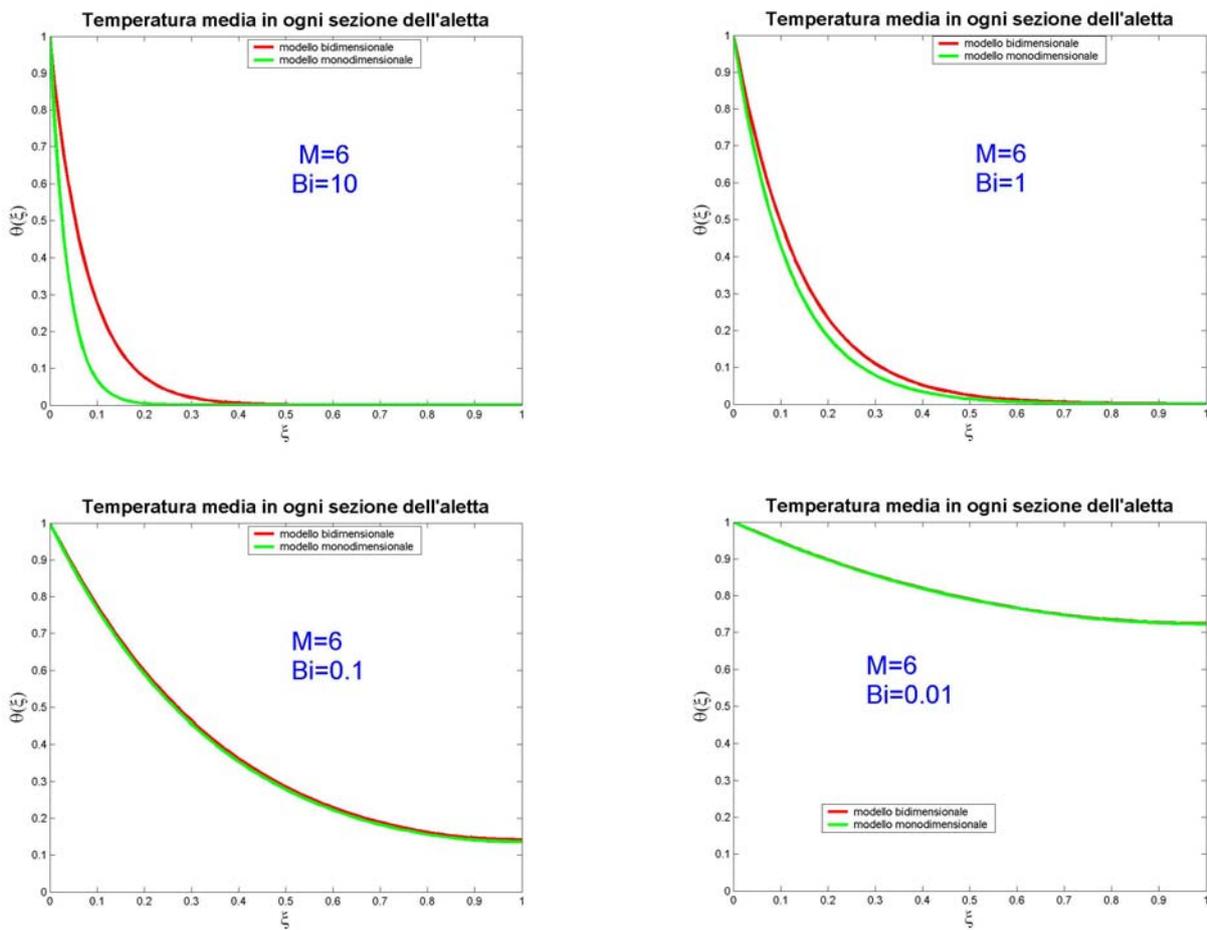
A questo punto possiamo trovare una giustificazione quantitativa al modello monodimensionale $Bi = \frac{hR_0}{k} \ll 1$ supponendo di lavorare con una aletta per la quale il rapporto M è fissato e mettendo a confronto i profili di temperatura adimensionale del modello monodimensionale e bidimensionale (in quest'ultimo caso mettendoci ad $r=0$).



Da questi grafici leggiamo quanto ci aspettavamo e cioè con Bi che decresce i modelli tendono a coincidere; si consideri anche che lasciando fissato M al decrescere di Bi diminuisce la caduta di temperatura che si ha nell'aletta (con M=6 e Bi=0.01 si smaltisce per conduzione solo il 30% del salto $(T_0 - T_\infty)$); questo perché se si scrive il numero di Biot longitudinale si ha che

$$Bi_L = \frac{hL}{k} = \frac{hR_0}{k} \frac{L}{R_0} = BiM \text{ per cui lasciando fissato } M \text{ i due numeri di Biot sono direttamente}$$

proporzionali. Questo discorso di mettere a confronto i due modelli costruiti andrebbe fatto, a rigor di logica, in riferimento non alla temperatura sull'asse ma rispetto al valor medio della temperatura che si raggiunge in ogni sezione dell'aletta; per questo si riporta di seguito il confronto fatto nella maniera più rigorosa che si è citata:

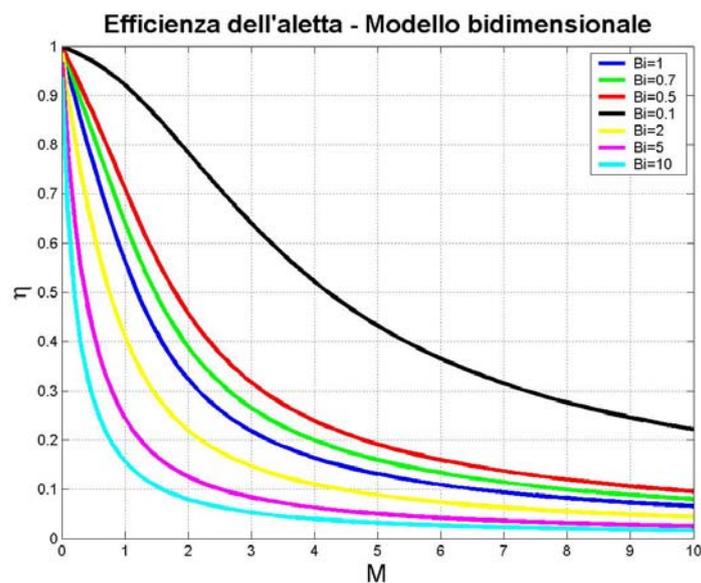


Con la modifica apportata si nota che le differenze tra i due modelli si assottigliano anche per Biot non “troppo piccoli” e decrementando lo stesso gruppo adimensionale i profili di temperatura subito tendono a sovrapporsi. È opportuno anche sottolineare il fatto che, scesi al di sotto di un certo valore di Bi ($Bi=0.1 \div 0.01$ in figura), fare riferimento alla temperatura sull'asse piuttosto che a quella media non fa differenza; questo è logico pensando al fatto che la posizione $Bi = \frac{hR_0}{k} \ll 1$ si

traduce dicendo che c'è sostanzialmente un “ corto circuito termico” nella direzione radiale del campo di temperatura: il profilo di temperatura in ogni sezione è sempre più piatto e temperatura media e quella sull'asse tendono a coincidere.

Efficienza dell'aletta con modello bidimensionale

Per valutare l'efficienza dell'aletta con il modello bidimensionale, al contrario di quanto fatto appena sopra, parametrizziamo rispetto al numero di Biot e variamo M ; agendo in tal modo possiamo dire di ragionare avendo scelto una volta per tutte il materiale con il quale costruiamo l'aletta (conducibilità termica k fissata) nonché immaginando che le caratteristiche termo-fluidodinamiche del fluido lambente l'aletta siano immutabili rispetto alla geometria (coefficiente di scambio termico h fissato). Questo vuol dire che se fissiamo Bi stiamo bloccando la dimensione trasversale dell'aletta cosicché, variando M , stiamo valutando l'efficienza all'aumentare della lunghezza dell'aletta:



Per leggere in maniera “alternativa” il grafico consideriamo una aletta per la quale $M=1$: al crescere del numero di Biot (si consideri dapprima la curva in nero nel grafico e si scenda per incontrare le altre curve), per quanto detto prima, stiamo considerando alette con raggi crescenti e si nota che l'efficienza decresce; volendo considerare dei valori numerici se ammettiamo che $\frac{h}{k} = 10$ si ha che con $Bi = 0.1$ l'aletta ha un raggio $R_0=1$ cm cui corrisponde una efficienza del 93%; producendo un allungamento tale per cui M è ancora unitario si ha, con $Bi = 1$, un raggio aletta $R_0=10$ cm e l'efficienza scende al 54%; con $Bi = 10$, $R_0=100$ cm e l'efficienza precipita al 15%. Ovviamente questo discorso vale per ogni altro valore di M anche se con un effetto sempre meno accentuato

nella misura in cui il rapporto lunghezza/raggio supera la decina (basta guardare la “coda” del grafico in cui le varie curve tendono a schiacciarsi l’una sull’altra). Un ulteriore aspetto qualitativo da considerare guardando l’andamento dell’efficienza, che ci consente anche di affermare che è più conveniente creare superfici alettate quando il numero di Biot è piccolo, è il fatto che con $Bi = \frac{hR_0}{k} \ll 1$ (nel grafico si nota con $Bi = 0.1$) la $\eta(M)$ mostra un flesso che rende meno schiacciata lungo l’asse orizzontale la curva in questione. Si noti che tutto quanto detto finora va preso “con le molle” laddove ci si riferisce a valori piccoli di M ; bisogna infatti considerare che il modello costruito assume adiabatica la estremità libera dell’aletta il che è un’ipotesi forte per certi valori di M e Bi .

Modello bidimensionale con condizione convettiva all’estremità libera

Per quanto considerato alle ultime righe del paragrafo precedente si vuole dare una misura sulla validità del modello con condizione di adiabaticità alla estremità libera e lo si fa considerando una condizione al contorno, sulla stessa sezione in oggetto, più congrua alla realtà fisica del problema: anche qui è l’interazione convettiva solido-fluido che regola il regime termico locale; per cui il problema matematico da considerare è lo stesso considerato in precedenza sostituendo la condizione

di adiabaticità $\frac{\partial T}{\partial x}(L, R) = 0$ con quella di scambio termico convettivo $-kT_x(L, R) = h(T(L, R) - T_\infty)$;

per ragioni di semplicità si è considerato lo stesso coefficiente di scambio termico dello scambio sulla superficie cilindrica ma l’ipotesi non è eccessivamente limitativa.

Caratterizzazione matematica del problema dimensionale

Come detto non bisogna fare enormi sconvolgimenti rispetto al problema impostato in precedenza, per cui si lasciano intatte la relazione che esprime l’equilibrio locale di energia e le condizioni che non coinvolgono la sezione ad $x=L$ la quale si modifica come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R} \frac{\partial(RT_R)}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ T(0, R) = T_0 \\ -kT_x(L, R) = h(T(L, R) - T_\infty) \\ \frac{\partial T}{\partial R}(x, 0) = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial R}(x, R_0) = h(T(x, R_0) - T_\infty) \end{array} \right.$$

Caratterizzazione matematica del problema adimensionale

Procediamo, al solito, in ragione delle seguenti quantità adimensionali, con la adimensionalizzazione:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad r = \frac{R}{R_0}, \quad \vartheta(\xi, r) = \frac{T(x, R) - T_\infty}{T_0 - T_\infty};$$

problema adimensionale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{\xi\xi} + \frac{L^2}{R_0^2} \frac{(r\vartheta_r)_r}{r} = 0 \\ \vartheta(0, r) = 1 \\ \vartheta_\xi(1, r) = -Bi_L \vartheta(1, r) \\ \vartheta_r(\xi, 0) = 0 \\ \vartheta_\xi(\xi, 1) = -Bi \vartheta(\xi, 1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Ovviamente si ha ancora } Bi = \frac{hR_0}{k} \text{ e la geometria è descritta dal} \\ \text{rapporto caratteristico } M = \frac{L}{R_0}; \text{ è comparso inoltre il numero di} \\ \text{Biot longitudinale definito come } Bi_L = \frac{hL}{k}. \end{array}$$

Risoluzione del problema differenziale adimensionale

Si sarà notato che la variazione della condizione al contorno non comporta una modifica significativa nella struttura matematica del problema in quanto la “direzione di r” propone ancora un problema totalmente omogeneo sul quale è possibile costruire un problema di autofunzioni necessario a soddisfare la condizione inomogenea sull’altra direzione; stiamo ovviamente parlando del metodo di separazione delle variabili e rispetto al caso precedente le novità le troviamo esclusivamente nella componente $X(\xi)$ della soluzione $\theta(\xi, r) = X(\xi)R(r)$.

Con la solita procedura si arriva a scrivere:
$$\begin{cases} \frac{X''}{M^2 X} = C \\ \left(\frac{rR'}{rR}\right)_r = -C \end{cases} \quad C = \lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} X(\xi) = C_1 e^{-\lambda M \xi} + C_2 e^{\lambda M \xi} \\ R(r) = C_3 J_0(r\lambda) + C_4 Y_0(r\lambda) \end{cases}$$

Come detto con la $R(r)$ si procede come visto prima mentre le differenze compaiono sull'altra direzione:

$$X'(\xi) = -\lambda M C_1 e^{-\lambda M \xi} + \lambda M C_2 e^{\lambda M \xi} \Rightarrow X'(1) = -\lambda M C_1 e^{-\lambda M} + \lambda M C_2 e^{\lambda M} = -Bi_L (C_1 e^{-\lambda M} + C_2 e^{\lambda M})$$

quindi le costanti di integrazione si legano attraverso la relazione
$$C_2 = -C_1 \frac{e^{-\lambda M} (Bi_L - \lambda M)}{e^{\lambda M} (Bi_L + \lambda M)}$$

ovvero $C_2 = C_1 e^{-2\lambda M} \frac{\lambda M - Bi_L}{\lambda M + Bi_L}$. Alla fine la soluzione si scriverà come:

$$\theta(\xi, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_n J_0(\lambda_n r) (e^{-\lambda_n M \xi} + e^{\lambda_n M (\xi-2)}) \frac{\lambda_n M - Bi_L}{\lambda_n M + Bi_L} \right\} \text{ ed i coefficienti della serie saranno dati da}$$

$$B_n = \frac{\int_0^1 J_0(\lambda_n r) r dr}{\int_0^1 (J_0(\lambda_n r))^2 r dr \left(\frac{\lambda_n M - Bi_L}{\lambda_n M + Bi_L} e^{-2\lambda_n M} + 1 \right)}; \text{ confrontando tale risultato con quello dell'aletta con}$$

estremità adiabatica ci si rende conto che quando $\lambda_n M - Bi_L = \lambda_n M + Bi_L$ ovvero $Bi_L = 0$ i modelli coincidono e questo vuol dire che fin da subito cogliamo quella informazione che volevamo: è tanto più lecito affidarsi all'approssimazione che prevede adiabatica la sezione libera dell'aletta quanto più il numero di Biot longitudinale tende a valori "piccoli". Si può fare un passo ulteriore

considerando che $Bi_L = \frac{hL}{k} = \frac{hR_0}{k} \frac{L}{R_0} = BiM$; sostituendo nella espressione scritta poche righe

sopra si ha: $\lambda_n M - Bi_L = M(\lambda_n - Bi) = M(\lambda_n + Bi) \Rightarrow Bi = 0$: visto il legame tra i due numeri di Biot dire che uno tende a zero significa rendere piccolo anche l'altro.

Verifica numerica dei risultati teorici

A valle di tutto ciò che si è visto è opportuno verificare che ci siano, ad esempio nella pratica dei dissipatori, dei riscontri numerici. Per fare questo si è considerato un “heatsink” ad alette cilindriche:



Per questo tipo di prodotto il produttore definisce la destinazione d’uso e cioè va applicato sulle memorie delle schede elettroniche venendo pertanto anche definite “Ramsink”. Ovviamente ci si rende conto che è necessario manipolare i risultati ottenuti nella trattazione teorica per adeguarli alle caratteristiche di performance fornite dal costruttore; a tale proposito è opportuno fare una digressione su come si caratterizzano solitamente i dissipatori.

Resistenza termica equivalente

Le unità dissipative ad esempio delle CPU non sono costituite da un’unica aletta ma da un pacco di alette protendenti dalla superficie da raffreddare; per cui se si indica con A_u la quota di superficie non ricoperta da alette e con A_f la totale superficie prodotta dall’alettatura si ha che la potenza termica dissipata vale: $\dot{Q} = A_u h(T_0 - T_\infty) + \eta A_f h(T_0 - T_\infty) = \frac{(T_0 - T_\infty)}{R_{al}}$ avendo posto ovviamente

$R_{al} = \frac{1}{h(A_u + \eta A_f)}$; le dimensioni di questa che viene detta resistenza termica equivalente sono

facilmente individuabili: $[R_{al}] = \frac{1}{[h][A]} = \frac{1}{\frac{W}{m^2 K} m^2} = \frac{K}{W}$ ovvero troviamo il rapporto tra una

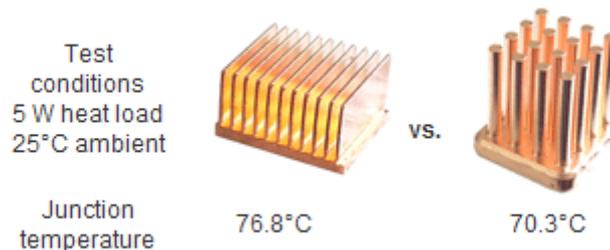
temperatura ed una potenza.

Ritornando al nostro Ramsink abbiamo che il produttore ne dichiara le seguenti caratteristiche:

Performance and specifications.

- Forged C110 copper
- 14mm (L) x 14mm (W) x 14.5mm (H)
- Weight: 0.3 oz (8.5 g)
- C/W: 9.0 (including TIM joint)
- Maximum recommended heat load: 5 Watts per heatsink

We conducted laboratory tests, comparing the MC14 to generic skived copper units such as shown below, and found a 6°C improvement in component temperature at a 5 Watts heat load.



Quello che ci interessa è il materiale (rame: conducibilità termica $k=400 \frac{W}{mK}$), le dimensioni di ciascuna aletta ed il numero di alette nonché le condizioni del fluido raffreddante. Per quanto riguarda queste due ultime quantità sappiamo che ogni Ramsink ha una base quadrata con lato $W=14\text{mm}$ sulla quale si protendono 16 alette di altezza $H=14\text{mm}$ (a rigore l'altezza del dissipatore è 14.5mm ma per conoscere l'altezza delle alette è necessario svincolarsi dallo spessore della base che supponiamo essere di mezzo millimetro); stante ciò si è proceduto alla determinazione del diametro di ciascuna aletta per via grafica: $D=1.5\text{mm}$. Sul fluido "refrigerante" sappiamo che le indicazioni sulle prestazioni riportate in precedenza sono state ricavate in ambiente atmosferico controllato alla temperatura $T_\infty=25^\circ\text{C}$. Molto più problematico è riuscire ad inferire sul coefficiente di scambio termico, per svariati motivi; uno tra tutti è il fatto che, in dipendenza di come si forzerà l'aria ad attraversare il dissipatore, ci saranno diversi comportamenti delle alette nei confronti della dissipazione (non si riuscirà in nessun caso a far sì che ci sia dappertutto lo stesso h) e questo può

far pensare alla possibilità di riferirsi ad un valor medio del coefficiente di scambio termico, che pure è un qualcosa di difficilmente valutabile. Per superare un problema del genere solitamente vengono forniti dei grafici in cui sulle ordinate si riporta la resistenza termica equivalente e sulle ascisse la velocità della ventola. Purtroppo non è il nostro caso; comunque proviamo a tirar fuori dei numeri sapendo che in convezione forzata con aria l'ordine di grandezza di h è 100. Sappiamo che la prima cosa da fare è valutare i parametri M e Bi che valgono rispettivamente: $M = \frac{H}{D/2} = 18.67$

$$Bi = \frac{hD/2}{k} = 0.0001875 \approx 2 \cdot 10^{-4}; \text{ tali valori ribadiscono in maniera plateale quanto si evinceva}$$

nella trattazione teorica spingendo altresì a riferirsi, per la caratterizzazione termica delle alette, al modello monodimensionale. Calcoliamo così in maniera agevole l'efficienza di ciascuna aletta :

$$mL = \sqrt{2BiM^2} = 0.3734 \Rightarrow \eta = \frac{\tanh(0.0792)}{0.0792} = 0.956; \text{ questo valore è utile per risalire alla potenza}$$

termica dissipata da ciascuna aletta (dalla definizione). Prima però occorre conoscere la temperatura T_0 del corpo da raffreddare; possiamo ricavarla riferendoci all'esperienza condotta dal produttore nel test che metteva a confronto due dissipatori (vedi figura): essendo 5W la potenza termica da smaltire in condizioni stazionarie si raggiunge in prossimità della giunzione Ramsink-memoria la temperatura di 70.3°C ed è questa la nostra T_0 . Riprendendo la definizione di efficienza dell'aletta

$$\text{si ha quindi: } \eta = \frac{\dot{Q}_f}{\pi DHh(T_0 - T_\infty)} = \frac{\dot{Q}_f}{0.297} \Rightarrow \dot{Q}_f = \eta 0.297 = 0.284W \text{ questa è la potenza termica}$$

dissipata da ciascuna aletta; tutta la superficie alettata dissipa $0.284 \cdot 16 = 4.544W$. A tale quantità dobbiamo aggiungere la quota di potenza termica dissipata dalla superficie di base, anch'essa in

rame, dalla quale non si protendono alette; questa area vale $A_u = 14^2 - 16\pi \frac{D^2}{4} = 167.72mm^2$ ed è

in grado di dissipare una potenza termica pari a $A_u h(T_0 - T_\infty) = 0.75W$; facendo la somma non otteniamo esattamente 5W ma questo non ci preoccupa visto che il calcolo stesso si presenta come una "stima" di ciò che accade nella realtà (ricordiamo che abbiamo assegnato per h un ordine di grandezza e non il suo valore "vero").

Una verifica ulteriore che si può fare riguarda il calcolo della resistenza termica equivalente che il produttore stesso ci fornisce. Dobbiamo calcolare le aree interessate dallo scambio termico:

$$A_u = 14^2 - 16\pi \frac{D^2}{4} = 167.72mm^2, \text{ ricordando quanto detto per il coefficiente di scambio termico}$$

$$\text{possiamo mettere tutto insieme ottenendo: } R_{al} = \frac{1}{5(167.72 + 0.9979 \cdot 1055.57) \cdot 10^{-6}} = 8.5 \frac{K}{W} \text{ che}$$

non è molto diverso dal $C/W=9$ leggibile in figura. Con tale valore di resistenza termica equivalente possiamo conoscere immediatamente quale è la temperatura che si raggiunge alla base del dissipatore quando questo deve dissipare 5W: $T_0 = T_\infty + R_{at} \dot{Q} = 67.5^\circ C$ (commettiamo un errore di circa $3^\circ C$ rispetto a quanto sperimentato dal produttore).