UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Tesina del corso di

TRASMISSIONE DEL CALORE

Argomento

Problema aletta finita risolto con metodo integrale

Allievo

Di Giacomo Francesco 0620300038

Il Docente

Prof. Ing. Gennaro Cuccurullo

INDICE GENERALE TESINA

TRACCIA

Si consideri una aletta rettangolare e si compari la soluzione integrale (integrando tra 0-L l'eq.ne differenziale) con quella esatta. Verificare che il massimo scarto con la sol. esatta si manifesta all'estremo libero (perché ?).

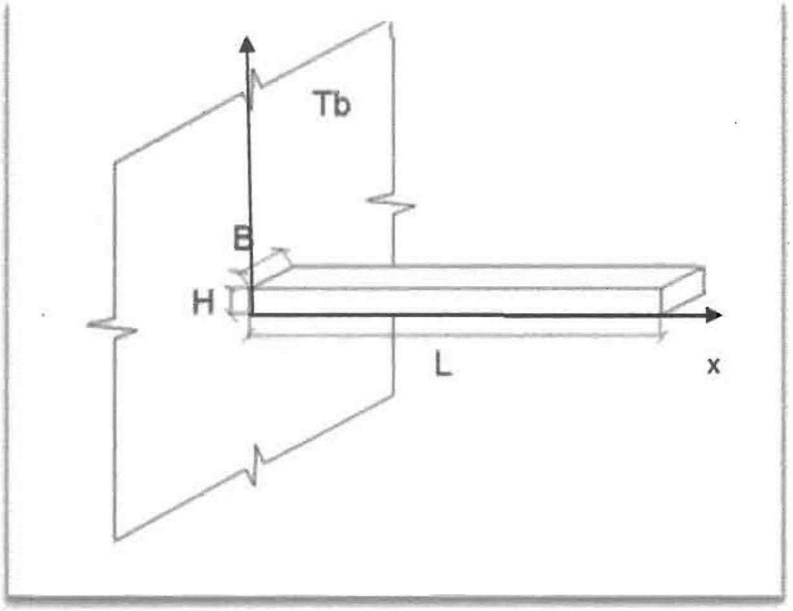
Allo scopo di tentare una rifinitura del risultato precedente si immagini di inserire una ulteriore funzione di forma atta a descrivere il profilo di base. La necessaria equazione aggiuntiva sia:

caso a): una eq.ne integrale con peso (1-x^2)

caso b): si specializzi il bilancio di energia ad x=0

comparare i risultati.

DEFINIZIONE PROBLEMA ALETTA FINITA



IPOTESI: L>>H; L>>B;

Si ipotizza l'aletta di lunghezza finita L ma 'sottile',ovvero, tale che la temperatura dipenda solo dalla coordinata x longitudinale all'aletta. Verifico tale evenienza, T(x), calcolo il N° di Biot trasversale che deve essere piccolo:

$$BiT = \frac{h}{K} * \frac{Area}{Perimetro} \ll 1$$

Si ipotizza inoltre che, data la piccola area trasversale, il flusso termico scambiato dalla superficie terminale dell'aletta sia trascurabile rispetto a quello scambiato dalla superficie laterale.

Dalla conservazione dell'energia scrivo l'equazione e le relative condizioni al contorno che descrivono il problema:

$$KA\frac{d}{dx}\frac{dT}{dx} = hP(T - Tf)$$

$$T(x = 0) = Tb$$

$$\frac{dT}{dx}(x = L) = 0$$

Procedo ad adimensionalizzare il problema:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad ; \quad \theta = \frac{T - Tf}{\Delta Trif} = \frac{T - Tf}{Tb - Tf} \quad ; \; m = \sqrt{\frac{hP}{KA}}$$

$$\frac{KA\Delta Trif}{L^2}\frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} = hP\Delta Trif\theta$$

$$\frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{L^2hP}{KA}\theta$$

Scrivo il problema adimensionalizzato con le relative condizioni al contorno:

$$\frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} = (Lm)^2\theta$$

$$\theta(0) = 1$$

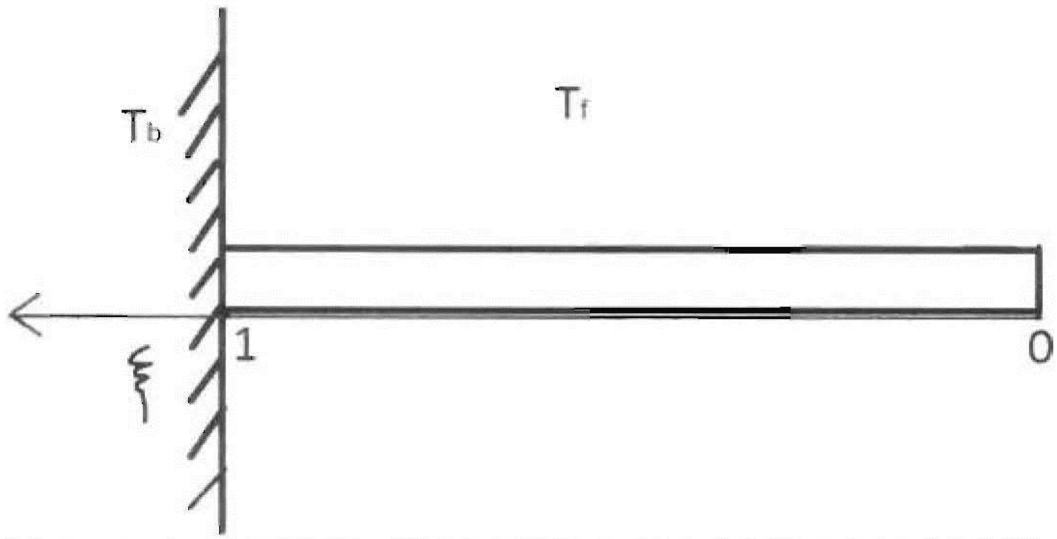
$$\frac{d\theta}{d\xi}(x = 1) = 0$$

La soluzione esatta di questo problema è:

$$\theta = \frac{\cosh(mL(1 - \xi))}{\cosh(mL)}$$

STUDIO CON IL METODO INTEGRALE PROBLEMA ALETTA FINITA

Scrivo ora lo stesso problema adimensionalizzato ma, per pulizia formale, sposto lo zero dell'asse delle ξ nell'estremo libero dell'aletta. ξ crescenti verso la base dell'aletta:



$$\frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} = (Lm)^2\theta \qquad (1)$$

$$\theta(1) = 1 \qquad (2)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi}(x = 0) = 0 \qquad (3)$$

Integro tra 0 e 1 la prima equazione per fare scomparire la dipendenza funzionale da ξ, e fornisco un profilo compatibile con le condizioni al contorno, la Trial Function.

$$\int_0^1 \frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi}\, d\xi = (Lm)^2 \int_0^1 \theta\, d\xi$$

$$\left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_1 = (Lm)^2 \int_0^1 \theta\, d\xi$$

Scelgo il profilo, TRIAL FUNCTION:

$$\boxed{\theta(\xi) = (1 - (1 - \xi^2)a)}$$

Sostituisco nell'equazione integrale, l'incognita è a e l'equazione è algebrica:

$$\left.\frac{d(1-(1-\xi^2)a)}{d\xi}\right|_1 = (Lm)^2 \int_0^1 (1-(1-\xi^2)a)\, d\xi$$

$$2a = (Lm)^2 \;\; \left(\xi\Big|_0^1 - a(\xi - \xi^3)\Big|_0^1 \right)$$

….. continuando nei passaggi algebrici:

$$\boxed{a = \frac{1}{2(\frac{1}{(lm)^2} + \frac{1}{3})}}$$

La soluzione ottenuta con il dato profilo di forma è:

$$\theta(\xi) = (1 - (1 - \xi^2)a) = (1 - (1 - \xi^2)(\frac{1}{2(\frac{1}{(lm)^2} + \frac{1}{3})}))$$

$$\boxed{\theta(\xi) = (1 - (1 - \xi^2)(\frac{1}{2\left(\frac{1}{(lm)^2} + \frac{1}{3}\right)}))}$$

DATI DEL PROBLEMA

Coefficiente di convezione esterno h, pari a 10W/m2°K in aria ferma, e quindi in condizione di convezione naturale

h= 10 W/m2°K

Dati geometrici dell'aletta

l=0.1m Lunghezza aletta

p=0.01m Sezione quadrata lato 0.0025m

A=6,5E-06 M2

Materiale costituente l'aletta

K= alluminio = 220 W/mK

Con questi dati calcolo m e ml

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{10*0.01}{220*0.0000065}} = 8.36$$

ml=0.836

e verifico che il Biot trasversale sia piccolo:

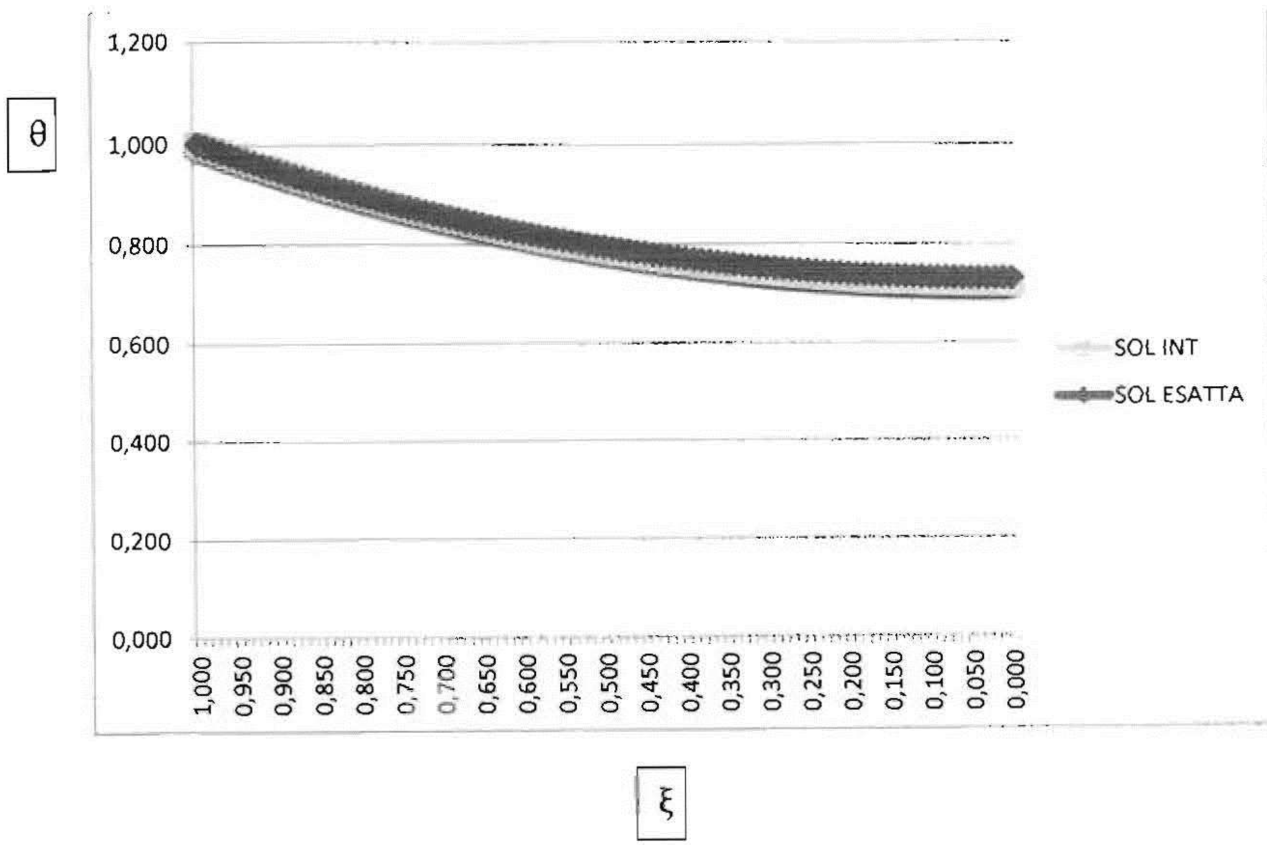
$BiT = \frac{h}{K} * \frac{Area}{Perimetro} = 0.000003 \ll 1$ l'aletta è sottile.

CONFRONTO SOLUZIONE ESATTA E APPROSSIMATA

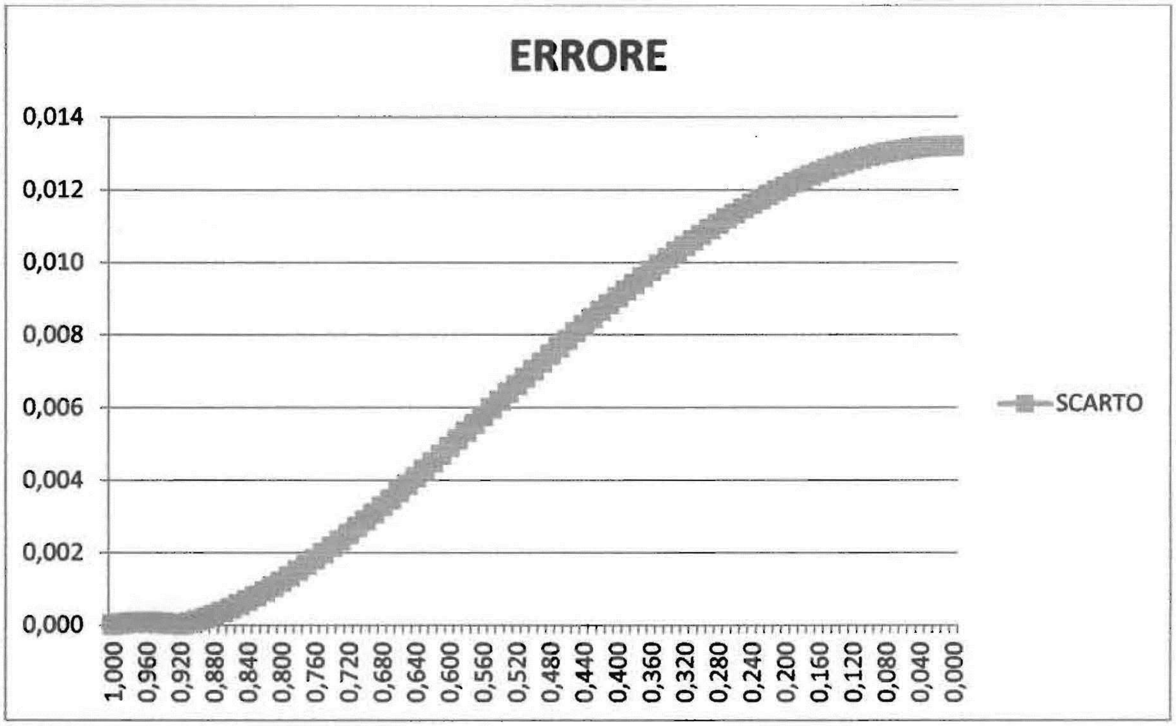
$$\theta(\xi) = (1 - (1 - \xi^{2})(\frac{1}{2\left(\frac{1}{(\mathrm{lm})^2}+\frac{1}{3}\right)}))$$ - soluzione approssimata

$$\theta(\xi) = \frac{\cosh(-\mathrm{mL}\xi)}{\cosh(\mathrm{mL})}$$ - soluzione esatta

GRAFICO: soluzione esatta vs soluzione approssimata.



ERRORE TRA LA SOLUZIONE ESATTA E QUELLA APPROSSIMATA:



$\boxed{\xi}$

Verifico che il massimo scarto tra le due soluzioni si manifesta all'estremo libero a causa del profilo ipotizzato che rispetta le due condizioni iniziali del problema esatto. Alla base dell' aletta ($\xi = 0$) le 2 soluzioni coincidono per la scelta del profilo effettuata, poi l'errore è crescente fino all'estremo libero dove si era imposta solo la tangente nulla e non il valore della temperatura . Si nota una prima zona in cui si manifesta un comportamento dell'errore anomalo legato agli errori di macchina del calcolatore.

I grafici sono stati realizzati con un semplice foglio di calcolo Excel

CALCOLO DEL CALORE SCAMBIATO DALL'ALETTA

Ipotesi :

In aggiunta all'ipotesi già descritte circa la geometria, il materiale dell'aletta e il coefficiente di convezione si forniscono le temperature del fluido e della base:

Temperatura del fluido: 20°

Temperatura della base dell'aletta: 100°

Calcolo il calore trasmesso ipotizzando un volume di controllo che abbraccia l'aletta, tutta la potenza conduttiva che entra dalla base viene scambiata per convezione:

$$\dot{Q} = -KA\frac{dT}{dx}\bigg|_{L} = KA(Tb - Tf)m * \text{tangh}(-Lm) = -0.65W$$

Dim:

$$\theta = \frac{\cosh(mL(-\xi))}{\cosh(mL)};$$

$$T = Tf + (Tb - Tf)\frac{\cosh(mL(-x))}{\cosh(mL)}$$

$$\frac{dT}{dx} = -mL\frac{(Tb-Tf)}{\cosh(mL)}\sinh(mL(-x))$$

$$\boxed{\dot{Q}esatta = -0.65W}$$

Questo è il calore scambiato dall' aletta ottenuto sfruttando la soluzione reale lo voglio confrontare con quello ottenuto con la soluzione approssimata:

$$\theta(\xi) = (1 - (1 - \xi^{2})a) = (1 - (1 - \xi^{2})(\frac{1}{2\left(\frac{1}{(lm)^2} + \frac{1}{3}\right)}))$$

$$T = Tf + (Tb - Tf)(1 - (1 - \frac{x^2}{l^2})(\frac{1}{2\left(\frac{1}{(lm)^2} + \frac{1}{3}\right)}))$$

$$\frac{dT}{dx} = 2(Tb - Tf)\frac{x}{l^2}(\frac{1}{2\left(\frac{1}{(lm)^2} + \frac{1}{3}\right)}))$$

$$\dot{Q} = -KA\frac{dT}{dx}\bigg|_{L} = -2KA(Tb - Tf)\frac{1}{L} * \left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{(lm)^2} + \frac{1}{3}\right)}\right) = -0.647W$$

$$\boxed{\dot{Q}appr = -0.647W}$$

Confrontando i due risultati si riscontra che il calore scambiato esatto è quasi coincidente con quello calcolato col profilo approssimato, l'errore, peraltro risultante in soli 3 millesimi di W, è fisicamente plausibile dato il valore medio di temperatura più alto nel caso della soluzione esatta.

RIFINITURA RISULTATO PRECEDENTE CON ALTRA FUNZIONE DI FORMA

E APPROCCIO DI COLLOCAZIONE PER IDENTIFICAZIONE COSTANTI

Allo scopo di tentare una rifinitura del risultato precedente inserisco una ulteriore funzione di forma atta a descrivere il profilo di base.

Scelgo un profilo di ordine superiore:

$$\theta(\xi) = (1 - (1 - \xi^2)(a + b\xi^2)$$

Sostituendo questo profilo nell'equazione del bilancio dell'energia, integrando in $d\xi$ scompare l'incognita ξ e restano le costanti a e b da determinare con un sistema di equazioni algebriche

Calcolo:

$$\theta' = 2(a - b)\xi + 4b\xi^3$$

$$\theta'' = 2(a - b) + 12b\xi^2$$

$$\theta'|_1 = 2(a - b) + 4b \; = 2(a+b)$$

$$\theta''|_0 = 2(a - b)$$

$$\theta(0) = 1 - a$$

e sostituisco i rispettivi valori nell'equazione del bilancio dell'energia:

$$\left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_1 = (Lm)^2 \int_0^1 \theta \, d\xi$$

$$2(a + b) = (Lm)^2 \int_0^1 (1 - (1 - \xi^2)(a + b\xi^2) \, d\xi$$

$$2(a + b) = (Lm)^2 (\xi|_0^1 - a\, \xi|_0^1 + \frac{a}{3} \xi^3|_0^1 - \frac{b}{3} \xi^3|_0^1 + \frac{b}{5} \xi^5|_0^1)$$

$$2(a + b) = (Lm)^2 (1 - a + \frac{a}{3} - \frac{b}{3} + \frac{b}{5})$$

$$2(a+b) = (Lm)^2(1 - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{15})$$

Per trovare a e b mi serve un'altra equazione allora con un **approccio di collocazione** impongo che il profilo ipotizzato soddisfi l'equazione differenziale nel punto $\xi = 0$:

$$\frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = (Lm)^2\theta|_{\xi=0}$$

$$2(a-b) = (Lm)^2(1-a)$$

Costruisco un sistema lineare con le due equazioni trovate per a e b:

$$\begin{cases} 2(a-b) = (Lm)^2(1-a) \\ 2(a+b) = (Lm)^2(1 - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{15}) \end{cases}$$

$$a = \frac{+2(Lm)^2 + {}^1/_{15}(Lm)^4}{4 + \ {}^9/_5(Lm)^2 + {}^1/_{15}(Lm)^4} = 0.27$$

$$b = (-(Lm)^2 + a(2 + (Lm)^2))/2 = 0.0145$$

Ora note le costanti a e b posso sostituirle nel profilo di forma ipotizzato in precedenza:

$$\theta(\xi) = 1 - (1 - \xi^2)(a + b\xi^2)$$

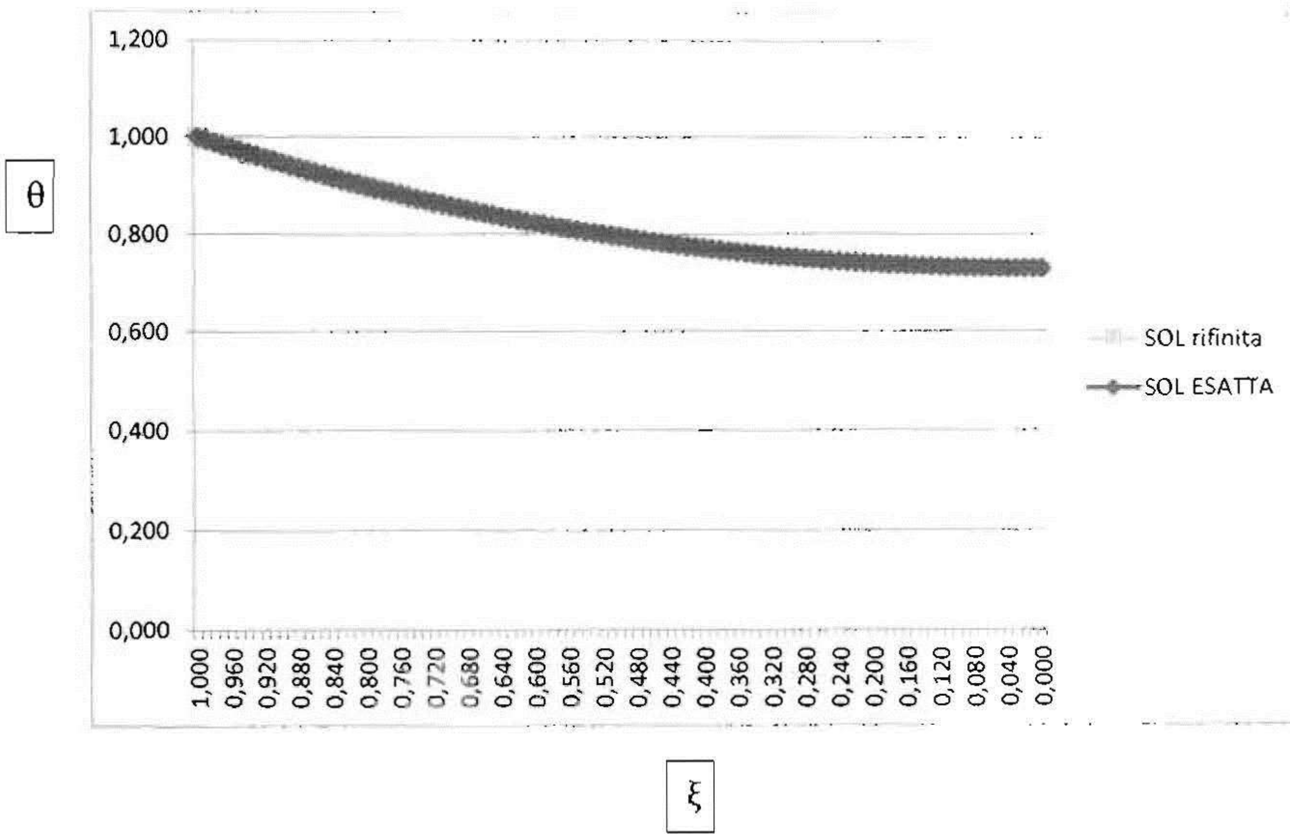
$$\theta(\xi) = 1 - (1 - \xi^2)(0.27 + 0.0145\xi^2)$$

CONFRONTO SOLUZIONE ESATTA E APPROSSIMATA (2)

$\theta(\xi) = 1 - (1 - \xi^2)(0.27 + 0.0145\xi^2)$ - soluzione approssimata

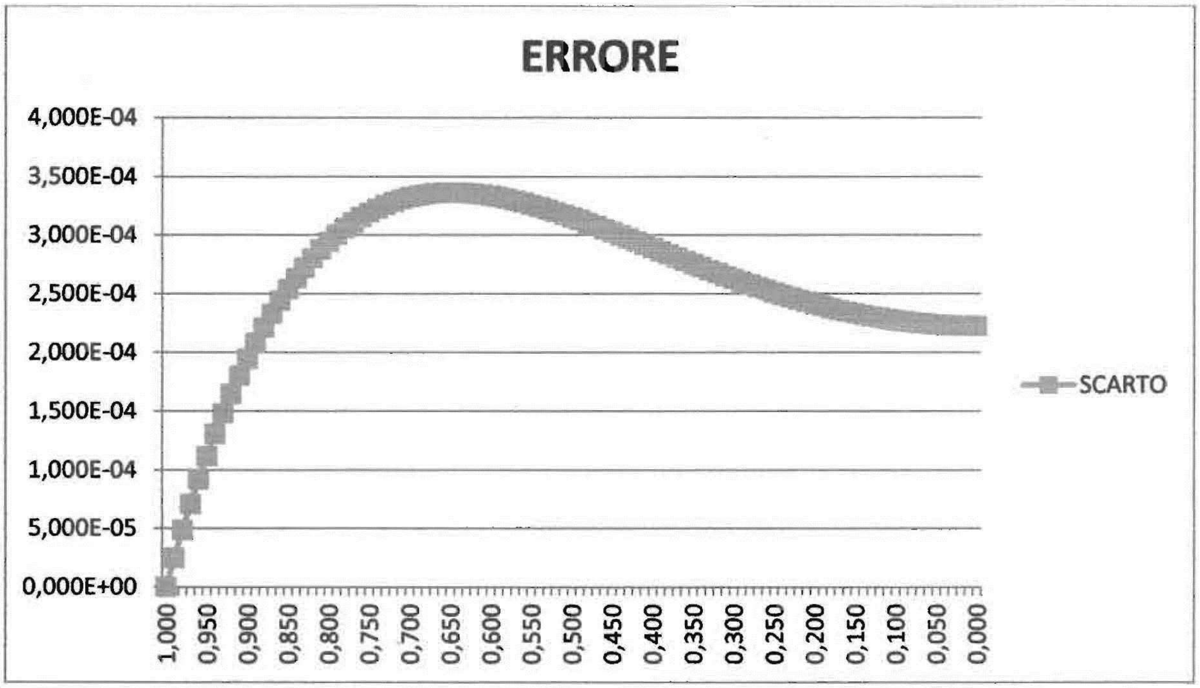
$\theta(\xi) = \frac{\cosh(mL(-\xi))}{\cosh(mL)}$ - soluzione esatta

GRAFICO: soluzione esatta vs soluzione approssimata.



La soluzione approssimata è quasi coincidente con quella esatta avendo usato una funzione di forma di ordine 4.

ERRORE TRA LA SOLUZIONE ESATTA E QUELLA APPROSSIMATA (2):



$\boxed{\xi}$

Verifico che la soluzione reale e quella approssimata ingegneristicamente coincidono poiché l'errore è dell'ordine ordine 10^{-4} cioè molto piccolo.

Inoltre il massimo errore non è più all'estremo libero dove in teoria dovrebbe essere zero avendo usato per il mio profilo un approccio di collocazione a $\xi = 0$. A causa delle approssimazioni durante il calcolo dei coefficienti a e b della soluzione approssimata c'è un errore diverso da zero anche all'estremo libero.

Le approssimazioni sono dovute al troncamento dei decimali alla terza cifra.

CALCOLO DEL CALORE SCAMBIATO DALL'ALETTA (2)

Noto il calore scambiato dall' aletta con la soluzione reale per θ lo voglio confrontare con quello ottenuto con la soluzione approssimata e rifinita:

$$\boxed{\dot{Q}esatta = -0.65W}$$

$$\theta(\xi) = 1 - (1 - \xi^2)(0.27 + 0.0145\xi^2)$$

$$T = Tf + (Tb - Tf)\theta(\xi) = Tf + (Tb - Tf)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)\left(0.27 + \frac{0.0145x^2}{l^2}\right)\right)$$

$$= Tf + (Tb - Tf)\left(1 - 0.27 - \frac{0.0145x^2}{l^2} + 0.27\frac{x^2}{l^2} + \frac{0.0145x^4}{l^4}\right)$$

$$= Tf + (Tb - Tf)\left(0.73 + 0.255\frac{x^2}{l^2} + \frac{0.0145x^4}{l^4}\right) =$$

$$\frac{dT}{dx} = (Tb - Tf)\left(0.510\frac{x}{l^2} + 0.0580\frac{x^3}{l^4}\right)$$

$$\dot{Q} = -KA\frac{dT}{dx}\Big|_L = -KA(Tb - Tf)\left(0.51\frac{l}{l^2} + 0.0435\frac{l^3}{l^4}\right) = -0.65W$$

$$\boxed{\dot{Q}appr = -0.65W}$$

Confrontando i due risultati si riscontra che il calore scambiato esatto è coincidente nel valore numerico con quello calcolato col profilo approssimato e rifinito.

CALCOLO EFFICIENZA E RENDIMENTO ALETTA

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}u} = \frac{\dot{Q}}{hA(Tb-Tf)} = \frac{0.65}{10*6{,}5E-06*80} = 125$$

Aletta molto conveniente

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}id} = \frac{\dot{Q}}{hpL(Tb-Tf)} = \frac{0.65}{10*0.001*80} = 0.81$$

METODOLOGIA ALTERNATIVA PER LA DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI a E b.

Allo scopo di tentare una rifinitura del risultato precedente si è scelto un profilo di ordine 4:

$$\theta(\xi) = (1 - (1 - \xi^2)(a + b\xi^2)$$

Le incognite sono a e b l'equazione è algebrica.

Dall'equazione del bilancio dell'energia:

$$\left.\frac{d\theta}{d\xi}\right|_1 = (Lm)^2 \int_0^1 \theta \, d\xi$$

Ho trovato la prima equazione:

$$2(a + b) = (Lm)^2 \left(1 - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{15}\right)$$

Per trovare la seconda invece di usare l'approccio di collocazione moltiplico l'equazione differenziale per $(1-\xi^2)$ e integro tra 0 e 1:

$$\int_0^1 (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} d\xi = \int_0^1 (1 - \xi^2) (Lm)^2 \theta \, d\xi$$

$$\int_0^1 \frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} d\xi - \int_0^1 \xi^2 \frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} d\xi = (Lm)^2 \int_0^1 \theta \, d\xi - (Lm)^2 \int_0^1 \xi^2 \, \theta d\xi$$

Noto che i primi due termini di ciascun membro dell'equazione sono l'equazione del bilancio integrata tra 0 e 1 allora li elido:

$$\int_0^1 \xi^2 \frac{d}{d\xi}\frac{d\theta}{d\xi} d\xi = (Lm)^2 \int_0^1 \xi^2 \, \theta d\xi$$

Essendo:

$$\theta'' = 2(a - b) + 12b\xi^2$$

$$\int_0^1 \xi^2(\, 2(a-b) + 12b\xi^2 \,)d\xi = (Lm)^2 \int_0^1 \xi^2(1-(1-\xi^2)(a+b\xi^2))\, d\xi$$

$$\frac{2}{3}(a-b)\xi^3\Big|_0^1 + \frac{12}{5}b\xi^5\Big|_0^1 = (Lm)^2(\frac{1-a}{3}\xi^3\Big|_0^1 + \frac{a-b}{5}\xi^5\Big|_0^1 + \frac{b}{7}\xi^7\Big|_0^1)$$

$$\frac{2}{3}(a-b) + \frac{12}{5}b = (Lm)^2(\frac{1-a}{3} + \frac{a-b}{5} + \frac{b}{7})$$

$$\frac{2}{3}a + \frac{26}{15}b = (Lm)^2(\frac{1}{3} - \frac{2a}{5} - \frac{2b}{35})$$

Questa costituisce la seconda equazione:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + \frac{26}{15}b = (Lm)^2(\frac{1}{3} - \frac{2a}{5} - \frac{2b}{35}) \\ 2(a+b) = (Lm)^2(1 - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{15}) \end{cases}$$

Risolvendo il sistema e posto $k = (Lm)^2$:

$$a = \frac{-13k + \frac{1}{3}k(k+1) - \frac{3}{7}k^2}{\frac{2}{3}(1+k) - 26 - \frac{200}{21}k + \frac{2}{5}k(k+1) + \frac{2}{7}k^2} = 0.28$$

$$b = \frac{-30a + k(15+10a)}{2+2k} = 0.04$$

Ora note le costanti a e b posso sostituirle nel profilo di forma ipotizzato in precedenza:

$$\theta(\xi) = 1 - (1-\xi^2)(a+b\xi^2)$$

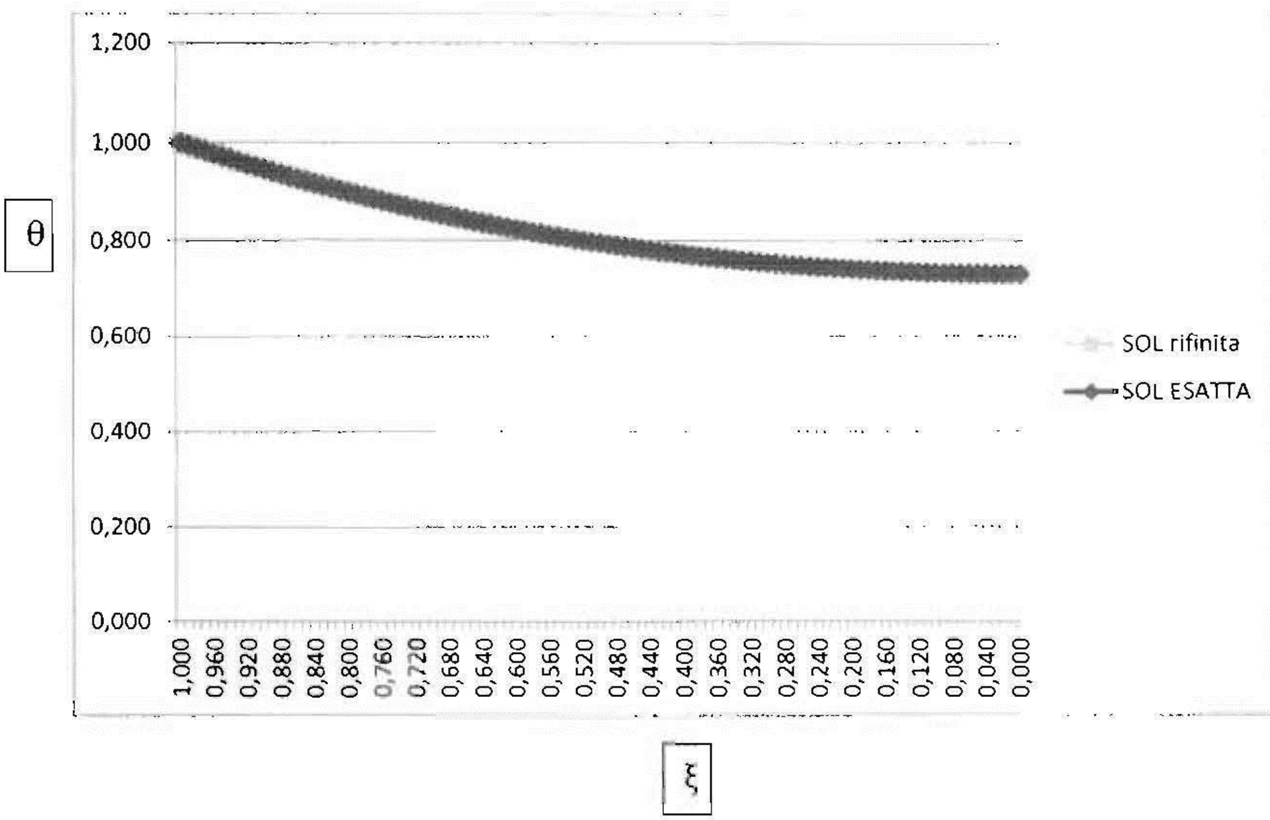
$$\theta(\xi) = 1 - (1-\xi^2)(0.28 + 0.04\xi^2)$$

CONFRONTO LA SOLUZIONE ESATTA E APPROSSIMATA (3)

$\theta(\xi) = 1 - (1 - \xi^{2})(0.28 + 0.04\xi^{2})$ - soluzione approssimata

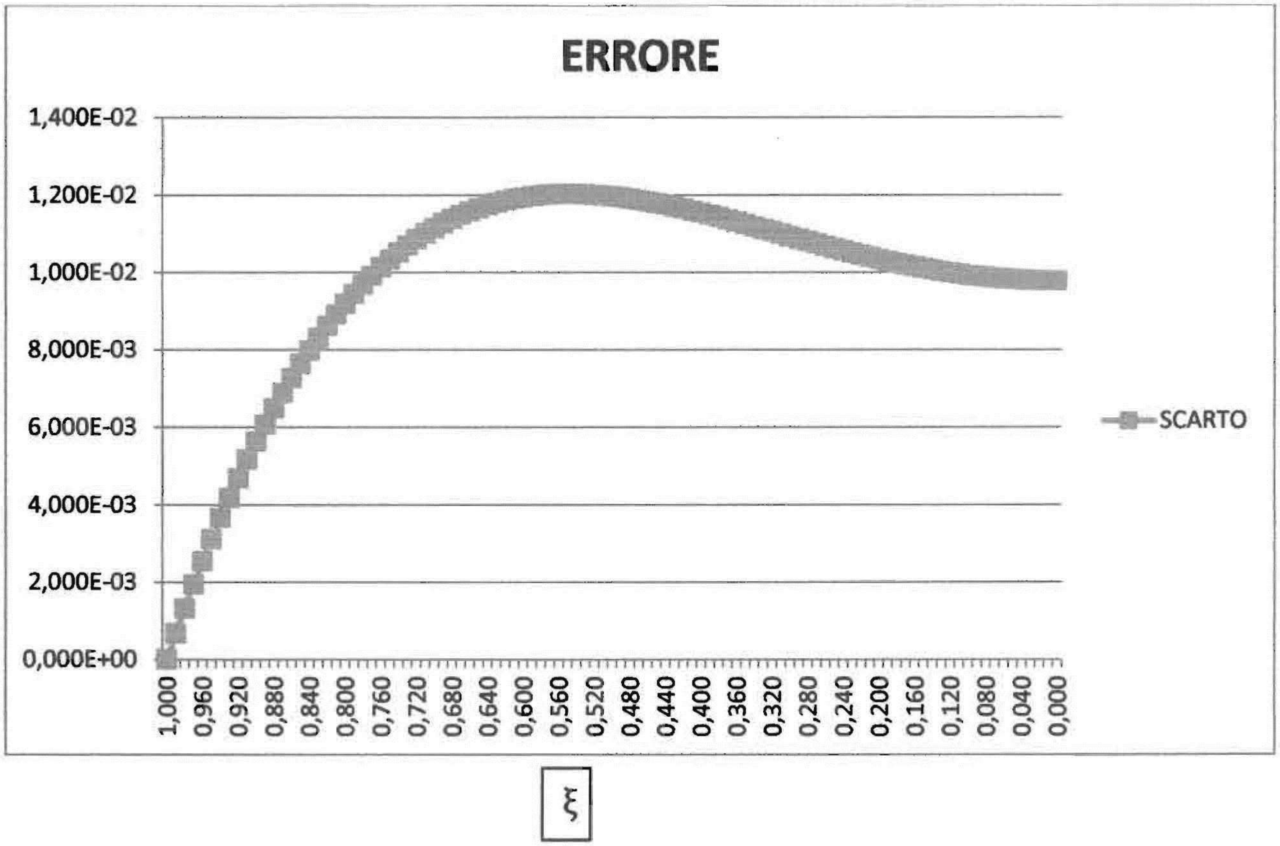
$$\theta(\xi) = \frac{\cosh(mL(-\xi))}{\cosh(mL)}$$ - soluzione esatta

GRAFICO:soluzione esatta vs soluzione approssimata.

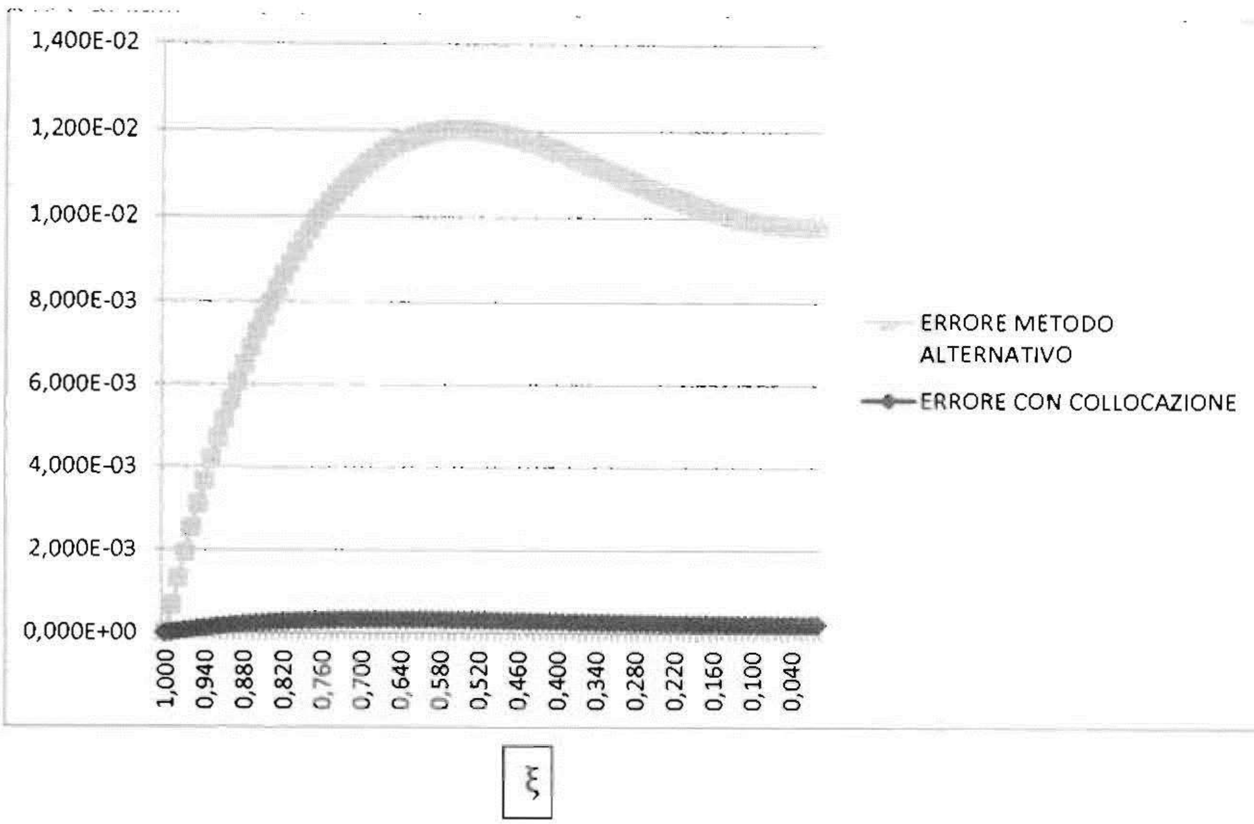


La soluzione approssimata è quasi coincidente con quella esatta avendo usato una funzione di forma di ordine 4.

ERRORE TRA LA SOLUZIONE ESATTA E QUELLA APPROSSIMATA (2):

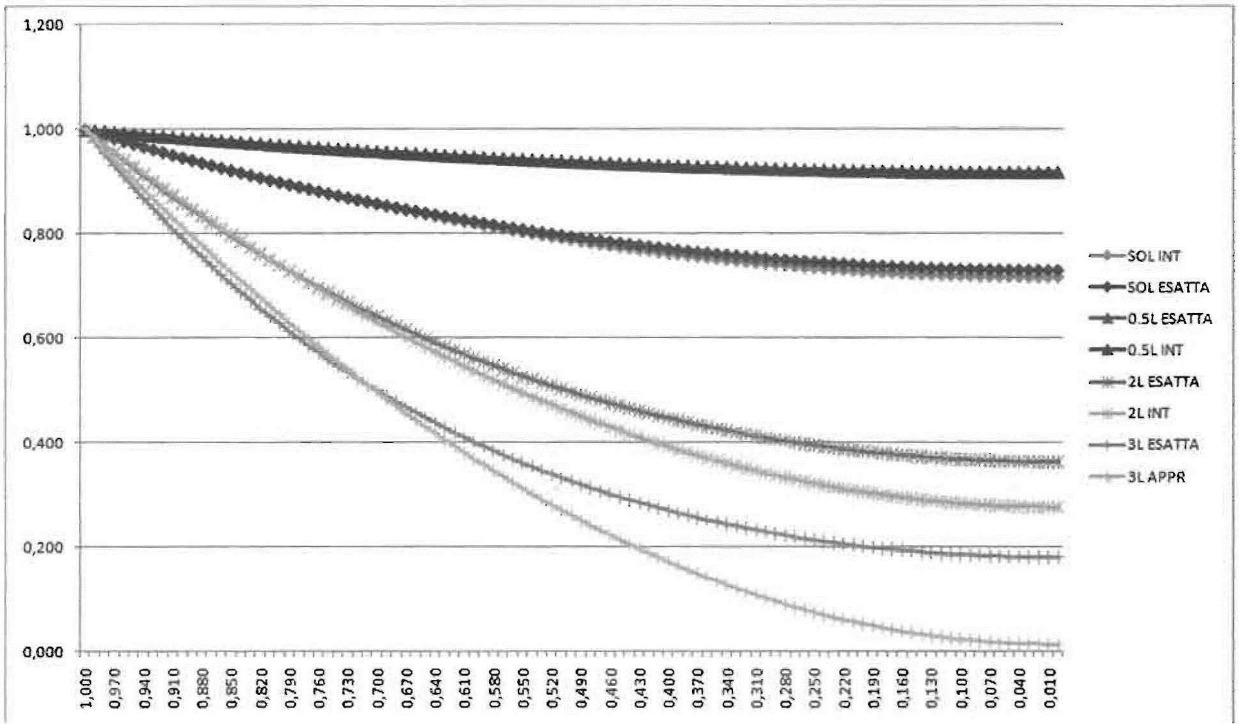


Verifico che la soluzione reale e quella approssimata ingegneristicamente coincidono poiché l'errore è dell'ordine ordine 10^{-2} cioè molto piccolo.



Graficando l'errore ottenuto con l'individuazione dei coefficienti con il metodo di collocazione rispetto a quello alternativo si nota che il metodo di collocazione mi fornisce coefficienti a e b tali da abbassare di un paio di ordini di grandezza l'errore.

PLOTTAGGIO CAMPO DI TEMPERATURA PER DIVERSE GEOMETRIA DELL'ALETTA



Il grafico rappresenta il campo di temperatura adimensionale nell'aletta per diverse lunghezze dell'aletta.

L=0.05m → L=0.1m → L=0.2m → L=0.3m

Per ogni lunghezza c'è la soluzione esatta e quella approssimata con la funzione di forma quadratica.

Si nota che con l'aumento della lunghezza dell'aletta aumenta l'errore rispetto alla soluzione reale.

Con la funzione di forma alternativa invece:

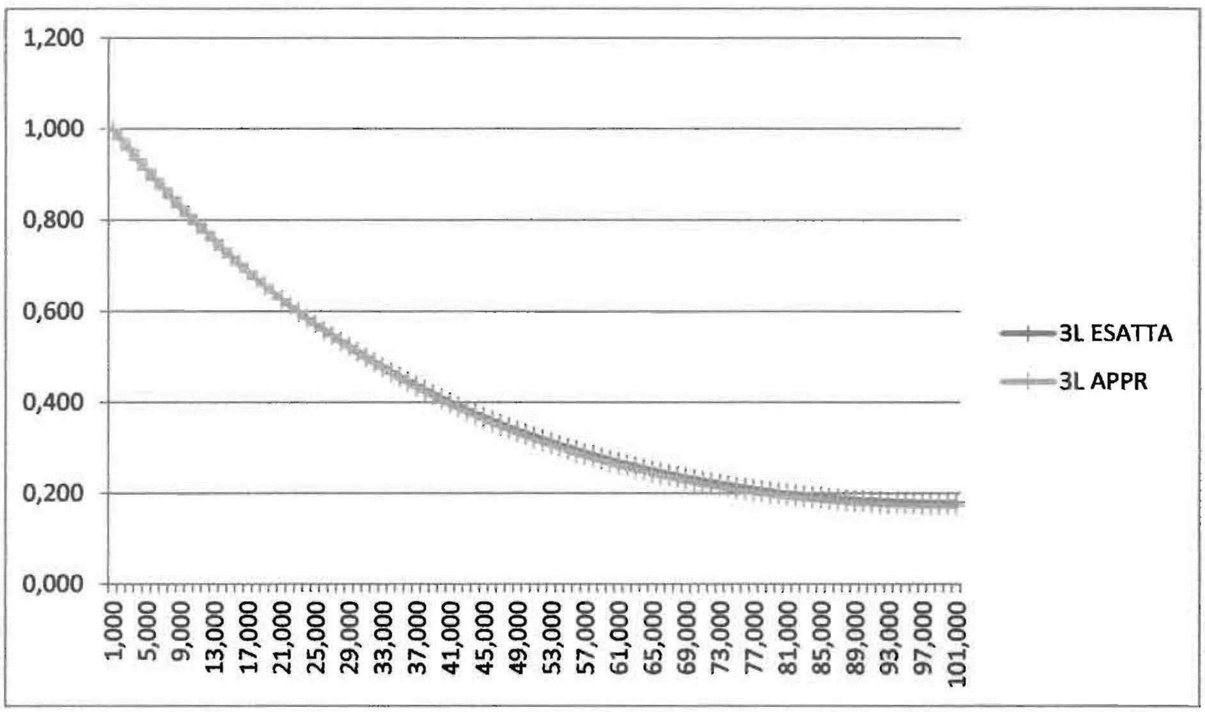
considerando una aletta lunga 3L il profilo quadratico presenta un errore all'estremo libero importante .

Con una aletta lunga 3L il profilo quadratico ipotizzato in primis non approssima bene l'andamento della temperatura, plottando il profilo rifinito di ordine superiore si apprezza come quest'ultimo riesca a approssimare in maniera soddisfacente la temperatura.

$$a=\frac{+2(Lm)^2+{}^1/_{15}(Lm)^4}{4+\ {}^9/_5(Lm)^2+{}^1/_{15}(Lm)^4}=0.827$$

$$b=(-(Lm)^2+a(2+(Lm)^2))/2=0.\ 328$$

$$\theta app(\xi)=1-(1-\xi^{\,2})(a+b\xi^2)$$



La funzione di forma di ordine 4 riesce ad approssimare bene la soluzione esatta anche per l'aletta molto più lunga.