

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

Tesina di

Trasmissione del calore

Docente Prof. Ing G. Cuccurullo

a.a. 2009/2010

STUDIO DEL TRANSITORIO TERMICO IN UN CONDUTTORE ELETTRICO

Naddeo Massimo

0620300232

Mea Luigi

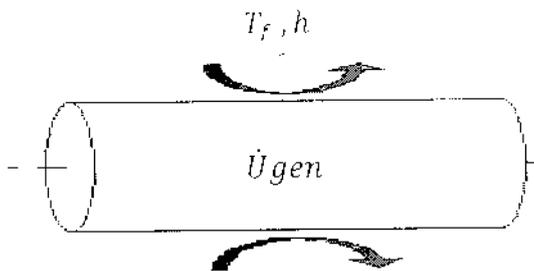
06020300242

Sommarrio

Introduzione al problema.....	3
Valutazione del numero di Biot.....	5
Schematizzazione del problema.....	7
Problema con u gen ed h costanti.....	8
Problema con u gen variabile ed h costante.....	10
Coefficiente di scambi termico convettivo.....	13
Problema con u gen costante ed h variabile lineamente con la T.....	16
Problema con u gen ed h variabili con la temperatura.....	20
Confronto numerico dei problemi con generazione variabile.....	24

Introduzione al problema.

Un filo di rame esposto all'aria è soggetto al passaggio di corrente elettrica che produce generazione termica. È noto che la resistenza elettrica del rame cresce linearmente con la temperatura. L'obiettivo è quello di determinare il transitorio termico a partire da condizioni di equilibrio con l'ambiente circostante.

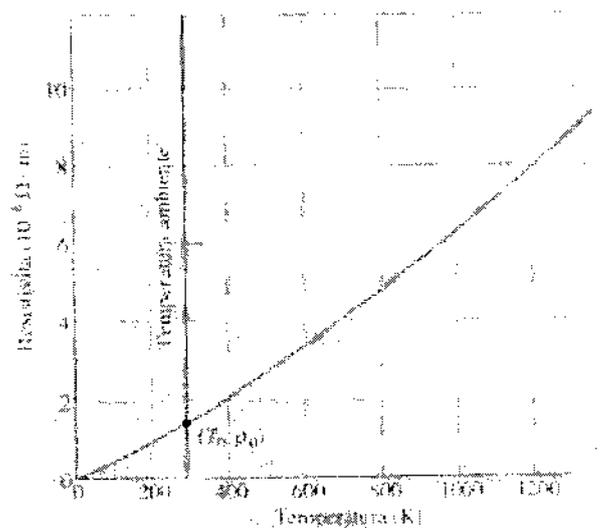


La generazione termica nel filo di rame è espressa dalla relazione:

$$\dot{U}_{gen} = RI^2$$

dove I è la corrente che attraversa il filo ed R è la resistenza del conduttore la quale può essere scritta in funzione della resistività elettrica, della temperatura e della geometria del conduttore stesso.

$$R = \rho_0 \frac{L}{S} (1 + \gamma \Delta T)$$



In termini di generazione per unità di volume definiamo:

$$\dot{u}_{gen} = \frac{\dot{U}_{gen}}{Vol} = \rho_0 \frac{I^2(1 + \gamma\Delta T)}{S^2}$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione di bilancio termico locale nella forma completa, cioè ritenendo la temperatura funzione del tempo, della coordinata spaziale e della generazione nelle ipotesi di proprietà termo-fisiche del materiale omogenee e costanti.

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot{u}_{gen}}{k}$$

Dove

$\frac{1}{\alpha} = \rho c/k$ è la diffusività termica del materiale;

k è la conduttività termica.

Tuttavia questa equazione può essere particolarizzata allo studio di casi più semplici sotto opportune ipotesi. Nel caso specifico considereremo il campo di temperatura indipendente dalle coordinate spaziali; questa ipotesi è verosimile per valori del numero di Biot < 0.1 .

Valutazione del numero di Biot.

Un conduttore elettrico è schematizzabile come un cilindro pieno di lunghezza molto maggiore del raggio quindi, per la particolare geometria, è possibile ritenere il campo di temperatura invariante nella direzione longitudinale. Per valori del numero di Biot < 0.1 , a fronte di un errore inferiore al 5%, si può approssimare il campo di temperatura uniforme anche lungo la direzione radiale eliminando così del tutto la dipendenza funzionale della temperatura dallo spazio.

Il filo conduttore, inizialmente in equilibrio con l'ambiente esterno è immerso in aria ferma a temperatura costante T_f di cui si conosce il coefficiente di scambio termico convettivo h . Il passaggio della corrente riscalda il filo per effetto Joule aumentandone la temperatura e dando origine a fenomeni di scambio termico convettivo.

Si vuole stimare nella condizione peggiore, e cioè quella di temperatura del solido prossima a quella di fusione, il valore del diametro massimo per il conduttore affinché si possa ritenere $Bi < 0.1$.

Il numero di Biot è definito come:

$$Bi = \frac{h L}{k_{rame}}$$

con L lunghezza caratteristica dipendente dalla geometria del sistema in esame e k conducibilità termica del materiale.

Il coefficiente di scambio termico convettivo è calcolabile in funzione del numero di Nusselt:

$$h = \frac{Nu \cdot k_{aria}}{L}$$

in questo caso k definisce la conducibilità termica dell'aria alla temperatura T_f .

Infine Nu lo si può esprimere, nell'ipotesi di convezione naturale e moto laminare, con la relazione di McAdams:

$$Nu \approx 0.53 Ra^{\frac{1}{4}}$$

Con $10^4 < Ra < 10^9$

$$Ra = Pr \frac{g \beta (T_s - T_f) D^3}{\nu^2}$$

Dove ν e β sono rispettivamente viscosità cinematica dell'aria e coefficiente di comprimibilità isobarica alla temperatura T_f mentre g è l'accelerazione di gravità. Pr è il numero di Prandtl, D il diametro del cilindro.

Esprimendo h in funzione del numero di *Nusselt* nell'espressione per il numero di *Biot* possiamo calcolare il valore massimo del diametro tale che sia $Bi = 0.1$.

$$D = \left(\frac{Bi \cdot k_{rame}}{0.53 \cdot k_{aria} \left(\frac{Pr \cdot g \cdot \beta \cdot (T_s - T_f)}{v^2} \right)^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

Proprietà del rame

Temperatura di fusione	1083 °C
Temperatura di ebollizione	2595 °C
Densità a 20 °C	8.94 g/cm ³
Carico di rottura (ricotto)	- 220 N/mm ²
Coefficiente di dilatazione termica a 20 °C	1,65 · 10 ⁻⁶ m/(m·K)
Ritiro di solidificazione	4,92 %
Calore specifico a 20 °C	0,385 kJ/(Kg·K)
Conducibilità termica a 20 °C	391 W/(m·K)
Resistività elettrica a 20 °C (ricotto)	0.017241 Ohm·mm ² /m
Coefficiente di temperatura della resistività elettrica	393 · 10 ⁻³ K ⁻¹
Velocità del suono	3600 m/s
Potenziale E° (Cu ²⁺ + 2e ⁻ → Cu)	0.337 V

Proprietà dell'aria a $T_f = 300$ K

Densità	1.1770 Kg/m ³
coefficiente di comprimibilità isobarica	3.333 · 10 ⁻³ 1/K
Calore specifico	1006 J/Kg·K
Conducibilità termica	2.614 · 10 ⁻² W/m·K
Viscosità cinematica	15.743 · 10 ⁻⁶ m ² /s
Prandtl	0.713
$g \cdot \beta / v^2$	131.932 · 10 ⁻⁶ K/m ³

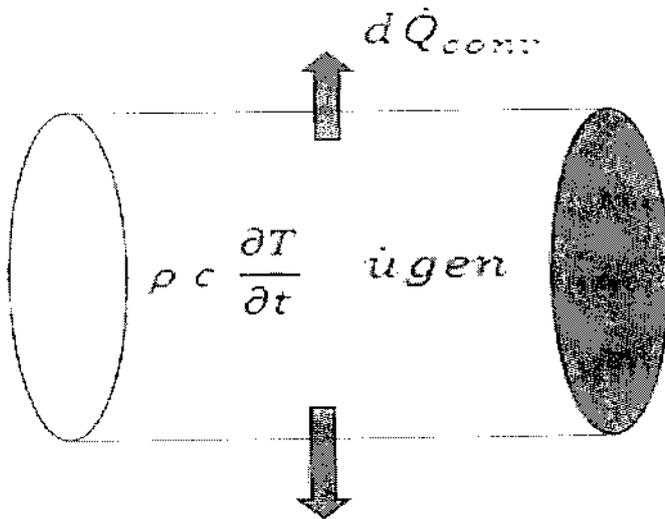
Tenuto conto delle proprietà sopra elencate e assunta la temperatura superficiale del cilindro T_s pari alla temperatura di fusione del rame, si ha:

$$D_{max} = 8.6 \text{ m}$$

Si può dunque ritenere nel caso in esame di conduttore con dimensione del diametro nell'ordine del millimetro che l'ipotesi di campo di temperatura indipendente dalle coordinate spaziali è ben fondata.

Schematizzazione del problema.

Nell'ipotesi su detta e opportunamente validata del numero di *Biot* < 0.1 possiamo sostituire all'equazione di bilancio locale una di bilancio globale. Tale equazione di bilancio è scritta per un elemento infinitesimo del conduttore sul quale si vanno a considerare la variazione di energia interna, il flusso termico scambiato per convezione e ovviamente la generazione.



L'equazione diventa:

$$\rho c s \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{u}_{gen} * s - hp(T - T_f)$$

Dove ρ, c, s, p sono rispettivamente la densità del materiale, il calore specifico del rame, la sezione del conduttore ed il perimetro.

A partire dall'equazione di bilancio globale si possono studiare quattro diversi casi:

- \dot{u}_{gen} costante, h costante;
- \dot{u}_{gen} variabile con la temperatura, h costante;
- \dot{u}_{gen} costante, h variabile con la temperatura;
- \dot{u}_{gen} ed h variabili con la temperatura;

Problema con \dot{u}_{gen} ed h costanti

Consideriamo il caso in cui la generazione interna d'energia oltre ad essere uniformemente distribuita sia costante, ed il coefficiente di scambio termico convettivo invariante con la temperatura.

L'equazione di bilancio che governa il problema è:

$$\rho c s \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{u}_{gen} s - hp(T - T_f) \quad \text{con} \quad \dot{u}_{gen} = \frac{l^2 \rho_0}{s^2}$$

L'unica condizione iniziale sulla temperatura è:

$$T(t = 0) = T_f$$

L'equazione di bilancio mette in mostra come la temperatura sia funzione di diversi parametri quali h, p, l, s, ρ, c , oltre che del tempo t dunque $T = T(h, p, l, s, \rho, c, t)$. Quando si hanno problemi di questo tipo si ricorre spesso all'adimensionalizzazione che permette di ridurre in maniera consistente il numero di parametri in gioco.

Procediamo all'adimensionalizzazione del problema definendo come variabili adimensionali:

$$\theta = \frac{T - T_f}{\Delta T_{rif}} \quad \tau = \frac{t}{trif}$$

Le grandezze di riferimento ΔT_{rif} e $trif$ non possono essere definite a priori nel problema ma si auspica che siano individuabili tramite il processo di adimensionalizzazione per motivi di pulizia formale.

In forma adimensionale il problema è definito dalle seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \theta = 1$$

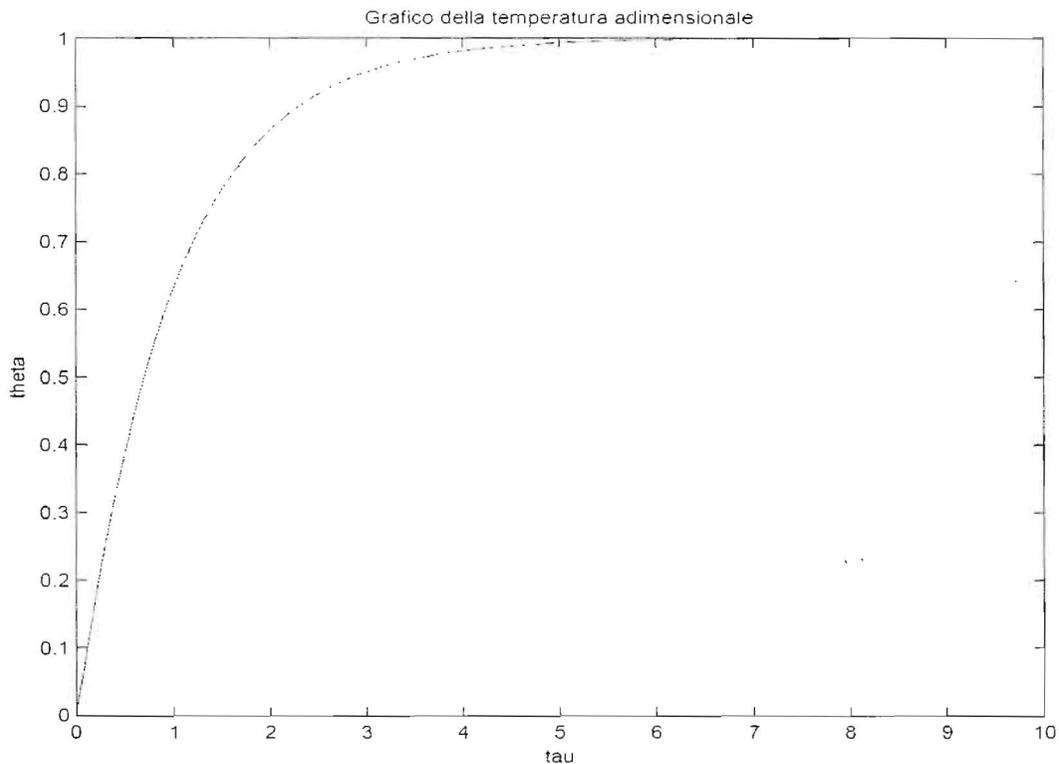
$$\theta(\tau = 0) = 0$$

Avendo posto:

$$\text{trif} = \frac{\rho c s}{h p} \quad \Delta T_{\text{rif}} = \frac{I^2 \rho_0}{s h p}$$

Risolviendo l'equazione differenziale in forma adimensionale otteniamo la soluzione:

$$\theta = -e^{-\tau} + 1$$



In forma dimensionale

$$T(t) = -\frac{I^2 \rho_0}{s h p} \left(e^{-\frac{h p t}{\rho c s}} - 1 \right) + T_f$$

Per tempi grandi l'esponenziale tende a zero e la temperatura T tende alla temperatura massima di equilibrio termico. Possiamo affermare che per t pari a qualche trif la temperatura ha raggiunto il valore massimo pari a:

$$T_{\text{max}} = \frac{I^2 \rho_0}{s h p} + T_f$$

Da questa relazione si può determinare, fissata la geometria del conduttore ed il coefficiente di scambio termico convettivo, qual è la corrente massima che può attraversare il cilindro senza raggiungere la temperatura T_{max} pari a quella di fusione del rame

Problema con \dot{u}_{gen} variabile ed h costante

In questo caso esplicitiamo le dipendenze funzionali di \dot{u}_{gen} dalla temperatura. Come già detto in precedenza possiamo scrivere:

$$\dot{u}_{gen} = \frac{l^2}{s^2} \rho_0 (1 + \gamma \Delta T)$$

L'equazione di bilancio diventa:

$$\rho c s \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{l^2}{s} \rho_0 (1 + \gamma \Delta T) - hp(T - T_f)$$

La condizione iniziale per questa equazione è quella di temperatura iniziale costante e pari a quella del fluido:

$$T(t = 0) = T_i = T_f$$

Affinché si possa effettuare l'adimensionalizzazione, si devono definire delle grandezze adimensionali relative al problema in esame. A tal fine si definiscono:

$$\theta = \frac{T - T_f}{\Delta T_{rif}} \quad \tau = \frac{t}{trif}$$

Come nel caso precedente le grandezze ΔT_{rif} e $trif$ non sono immediatamente individuabili per cui si lasciano al momento incognite sperando poi di determinarle nel processo di adimensionalizzazione per motivi di pulizia formale.

In forma adimensionale l'equazione si scrive:

$$\rho c s \frac{\Delta T_{rif}}{trif} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{l^2 \rho_0}{s} + \frac{\gamma l^2 \rho_0}{s} (T - T_f) - hp(T - T_f)$$

La condizione iniziale si trasforma invece:

$$\theta(\tau = 0) = 0$$

Dividiamo ora l'equazione di bilancio per hp e ΔT_{rif} così da ottenere:

$$\frac{\rho c s}{hp * trif} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{l^2 \rho_0}{shp \Delta T_{rif}} + \frac{\gamma l^2 \rho_0}{shp} \theta - \theta$$

Scegliamo a questo punto:

$$trif = \frac{\rho c s}{hp} \quad \Delta T_{rif} = \frac{l^2 \rho_0}{shp} \quad m^2 = \frac{l^2 \rho_0 \gamma}{shp}$$

Scegli il tempo e la temperatura di riferimento e definito il coefficiente m^2 l'equazione assume una forma semplice e facilmente integrabile; infatti:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 1 - \theta(1 - m^2)$$

La soluzione dell'equazione differenziale è:

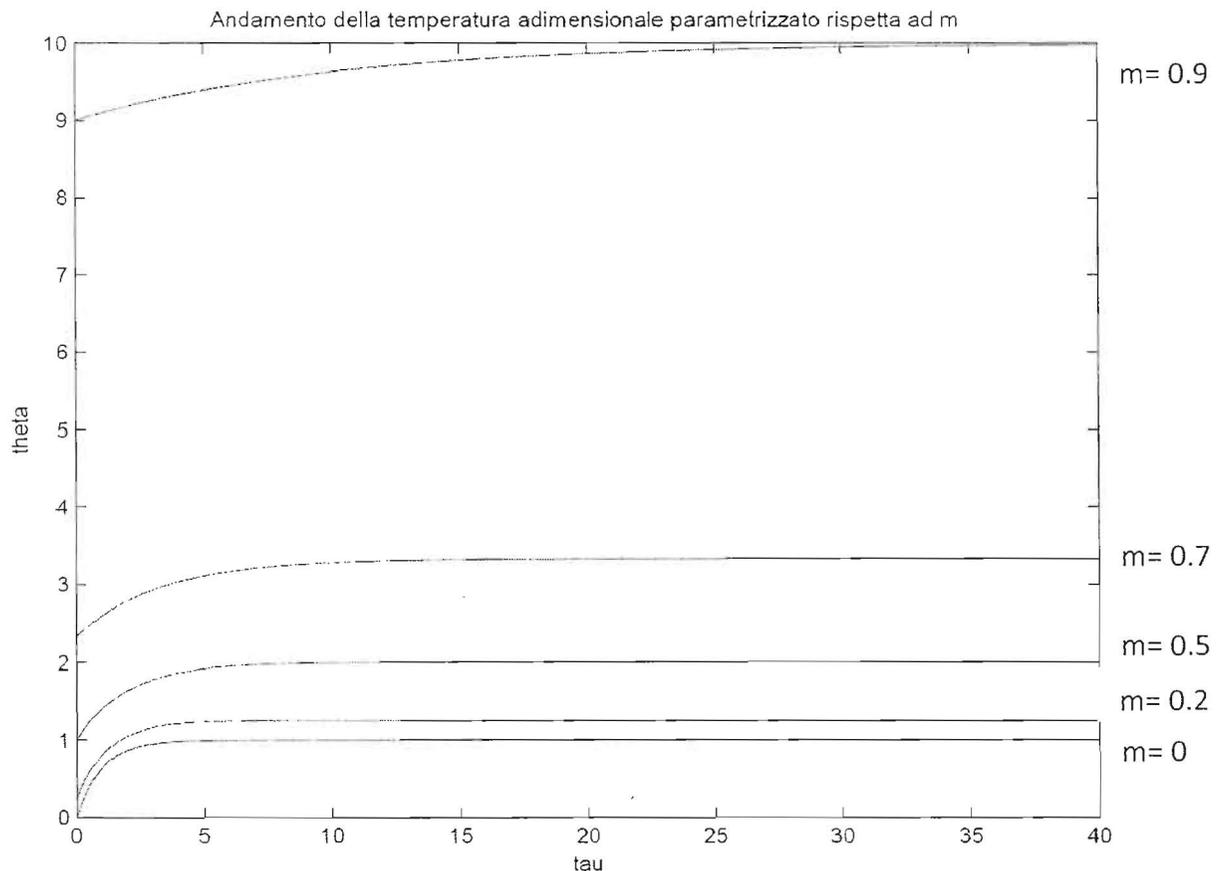
$$\theta(\tau) = C_1 e^{-(1-m^2)\tau} + \frac{1}{1-m^2}$$

Per determinare la costante C_1 applichiamo la condizione iniziale così da ottenere:

$$C_1 + \frac{1}{1-m^2} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{1-m^2}$$

Dunque:

$$\theta(\tau) = \frac{1}{1-m^2} (1 - e^{-(1-m^2)\tau})$$



Come si può vedere questa espressione recupera quella del caso in cui la generazione sia costante al tendere di m^2 a 0. Un'altra importante osservazione da fare è che nell'espressione di $\theta(\tau)$ compare il termine $\frac{1}{1-m^2}$ il quale definisce la condizione di instabilità termica: infatti deve necessariamente essere $\frac{1}{1-m^2} > 0$ e quindi $1 - m^2 > 0$. Questa equazione ci permette di calcolare la massima corrente che può attraversare il conduttore.

$$m^2 < 1 \rightarrow \frac{I^2 \rho_0 \gamma}{shp} < 1 \rightarrow I < \sqrt{\frac{shp}{\rho_0 \gamma}}$$

Infine passando alla forma dimensionale:

$$\frac{T - T_f}{\frac{I^2 \rho_0}{shp}} = \frac{1}{1 - m^2} \left(1 - e^{-\frac{(1-m^2)hp}{\rho_0 cs} t} \right)$$

$$T = T_f + \frac{I^2 \rho_0}{(1 - m^2)shp} \left(1 - e^{-\frac{(1-m^2)hp}{\rho_0 cs} t} \right)$$

Facendo il limite per t che tende ad infinito otteniamo la temperatura di equilibrio termodinamico e cioè la temperatura massima raggiunta dal conduttore che vale:

$$T_{max} = T_f + \frac{I^2 \rho_0}{(1 - m^2)shp}$$

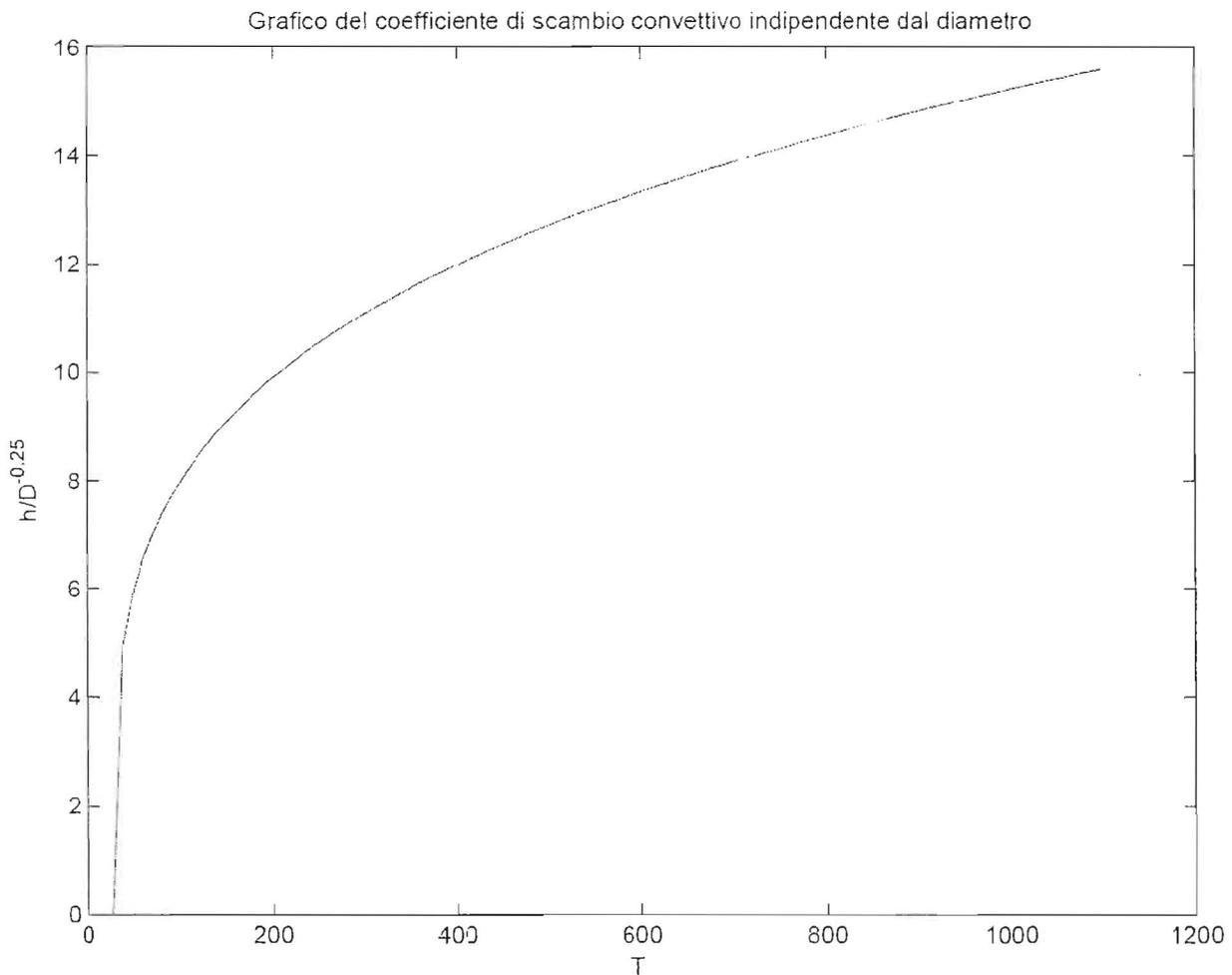
Coefficiente di scambi termico convettivo.

Il coefficiente di scambio termico convettivo, come già visto in precedenza, può essere espresso in funzione del salto di temperatura dato dalla differenza della temperatura superficiale del cilindro e la temperatura del fluido, per ipotesi ritenuta costante, nonché dalle proprietà del fluido e dal diametro.

Tramite la relazione di McAdams

$$h_r = 1.06 D^{-\frac{1}{4}} \text{ karia } Pr^{0.25} \left(\frac{g\beta (T - T_f)}{v^2} \right)^{0.25}$$

Nel grafico seguente si riporta l'andamento di $h_r / D^{-\frac{1}{4}}$ in funzione della temperatura.



Si cerca una relazione di tipo lineare per esprimere h , del tipo:

$$h = A D^{\frac{-1}{4}} (T - T_s)$$

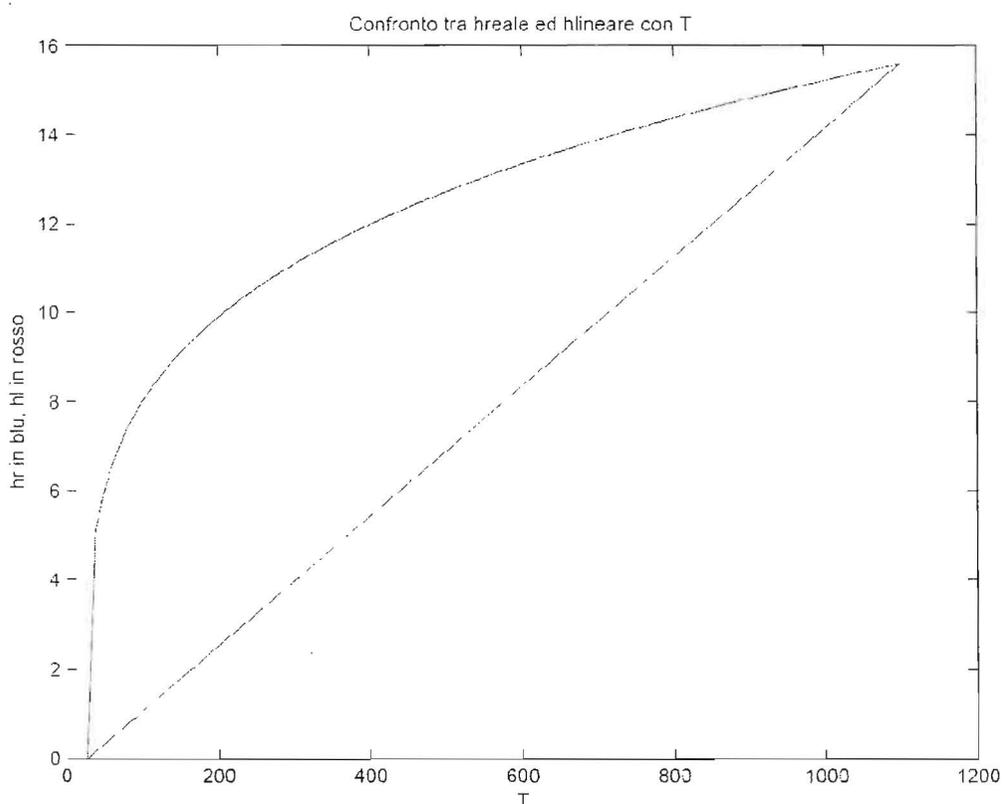
La costante di proporzionalità A è ricavabile da una semplice interpolazione lineare tra due valori di h_r in particolare valutando:

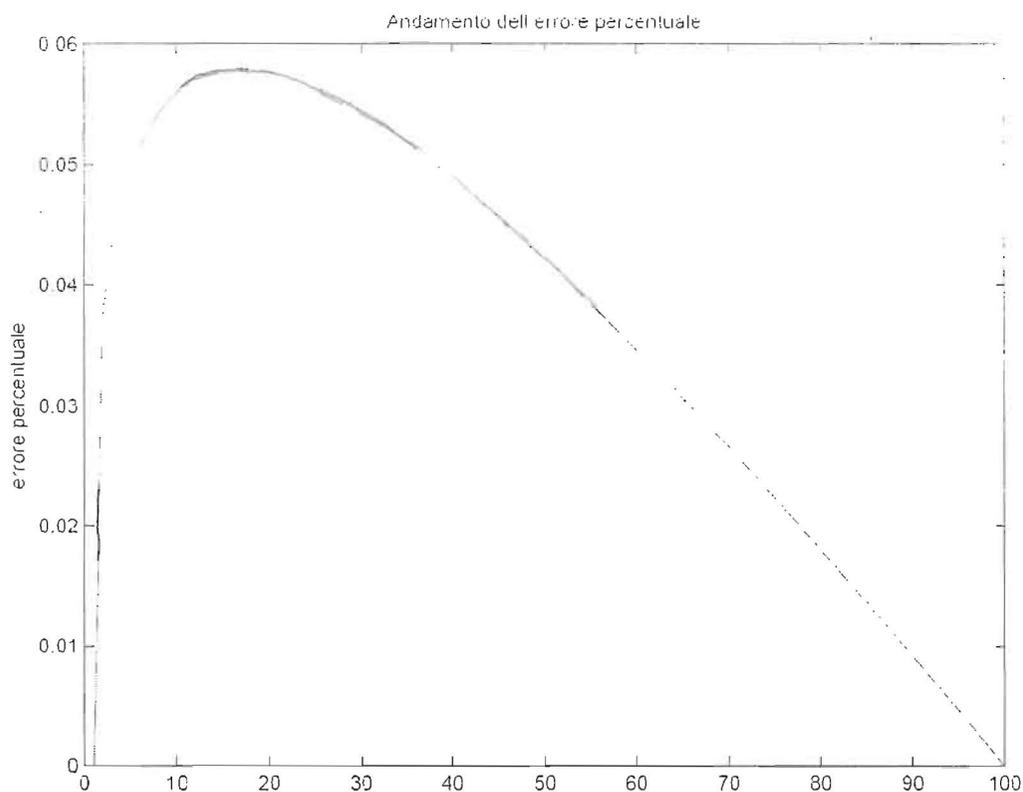
$$\frac{h_r}{D^{\frac{-1}{4}}}(T = T_f) = 0 \quad e \quad \frac{h_r}{D^{\frac{-1}{4}}}(T = 1100 \text{ } ^\circ\text{C}) = 7.807$$

Per cui il valore della costante A

$$A = 1.45 * 10^{-2}$$

Di seguito si riporta il grafico $h_r / D^{\frac{-1}{4}}$ e di $h / D^{\frac{-1}{4}}$ funzione lineare della temperatura e quello dell'errore percentuale.





Nel grafico relativo all'errore si osserva che nel considerare h funzione lineare della temperatura si commette un errore massimo del 6%.

Quindi possiamo esprimere con buona approssimazione il coefficiente di scambio termico convettivo come funzione lineare della temperatura così da rendere più facile la risoluzione delle equazioni differenziali nelle quali si tiene conto della variabilità di h .

Problema con \dot{u}_{gen} costante ed h variabile lineamente con la T

Si affronta ora il problema considerando la generazione termica costante e il coefficiente di scambio termico convettivo funzione lineare della temperatura secondo la relazione determinata in precedenza:

$$h = a (T - T_s)$$

avendo posto la costante a relativa alle caratteristiche del fluido e della geometria, come:

$$a = A D^{-1/4}$$

Il problema è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\rho c s \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{u}_{gen} * s - a p (T - T_f)^2 \quad \text{con} \quad \dot{u}_{gen} = \frac{l^2 \rho_0}{s^2}$$

$$T(t = 0) = T_f$$

Procediamo all'adimensionalizzazione del problema definendo come variabili adimensionali:

$$\theta = \frac{T - T_f}{\Delta T_{rif}} \quad \tau = \frac{t}{trif}$$

Ancora una volta le grandezze di riferimento ΔT_{rif} e $trif$ non possono essere definite a priori nel problema ma si auspica che siano individuabili tramite il processo di adimensionalizzazione per motivi di pulizia formale.

Procedendo con il processo di adimensionalizzazione si ottiene:

$$\rho c s \frac{\Delta T_{rif}}{trif} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{l^2 \rho_0}{s} - a p (T - T_f)^2 \frac{\Delta T_{rif}^2}{\Delta T_{rif}^2}$$

Ponendo:

$$trif = \frac{\rho c s}{a p \Delta T_{rif}} \quad \Delta T_{rif}^2 = \frac{l^2 \rho_0}{s a p}$$

In fine il problema adimensionalizzato è:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \theta^2 = 1$$

$$\theta(\tau = 0) = 0$$

L'equazione differenziale è del primo ordine non lineare e non omogenea a coefficienti costanti ed è risolvibile con il metodo di Eulero a patto che se ne conosca una soluzione particolare.

Tipologia di equazioni risolvibili con il metodo di Eulero:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = P(z) + Q(z)\theta + R(z)\theta^2 \quad \text{nel caso specifico} \quad P(z) = 1; \quad Q(z) = 0; \quad R(z) = -1$$

Una soluzione particolare è

$$\theta_p = 1$$

Facendo la posizione

$$y = \frac{1}{\theta - \theta_p}$$

$$y' = -(Q + 2\theta_p R)y - R$$

Si ottiene

$$y' = 2y + 1$$

La cui soluzione è:

$$y = c_1 e^{2\tau} - \frac{1}{2}$$

Quindi:

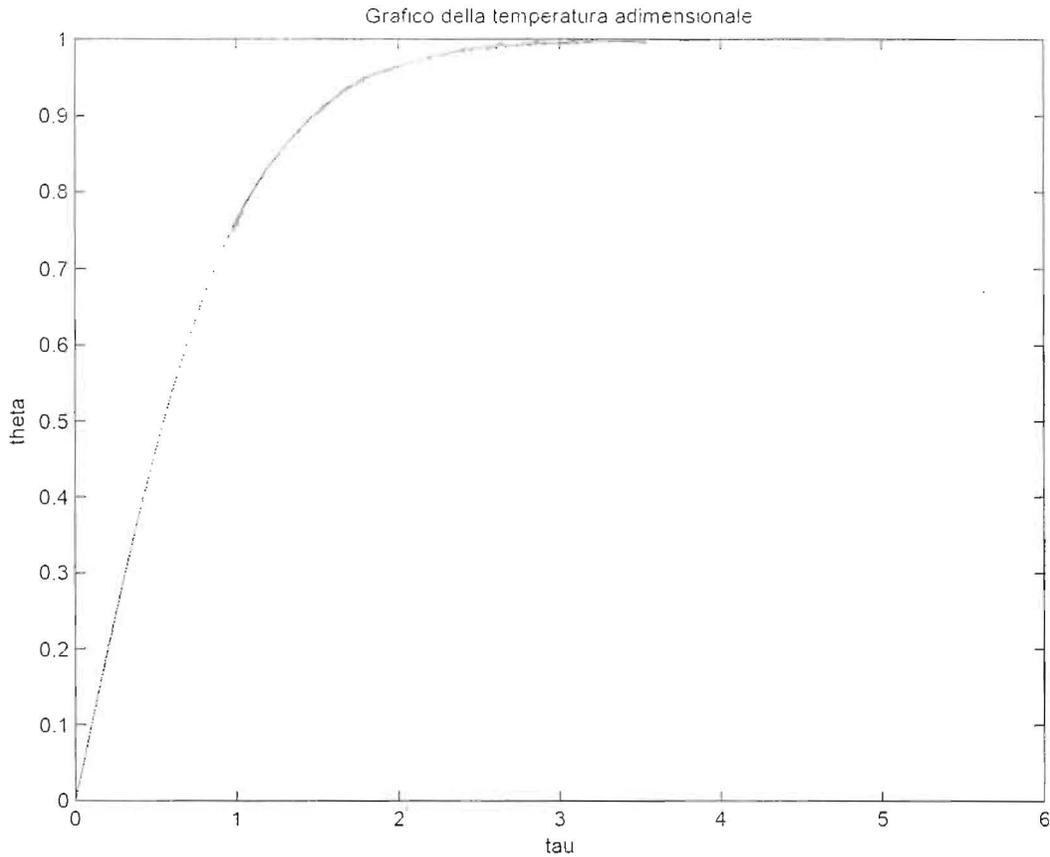
$$\theta = \theta_p + \frac{1}{y} \quad \text{cioè} \quad \theta = 1 + \left(c_1 e^{2\tau} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

Imponendo la condizione iniziale ricaviamo il valore della costante c_1

$$\theta(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2}$$

La soluzione del problema adimensionalizzato è:

$$\theta(\tau) = 1 - \frac{2}{e^{2\tau} + 1}$$



Si osserva che per t pari a qualche *trif* si può considerare raggiunta la condizione di massima temperatura, in particolare per $\tau = 3$ si ha $\theta=0.99$ cioè il salto di temperatura ha raggiunto il 99% di quello massimo.

In forma dimensionale:

$$T(t) = \sqrt{\frac{l^2 \rho_0}{s a p}} \left[1 - \frac{2}{\left(1 + e^{\frac{2 a p}{\rho c s} \sqrt{\frac{l^2 \rho_0}{s a p}} t} \right)} \right]$$

Al tendere del tempo a valori molto grandi, in particolare, come visto in precedenza, per $t = 3 \text{ trif}$, si raggiunge la condizione di temperatura massima di equilibrio termico data da:

$$T_{eq} = \sqrt{\frac{I^2 \rho_0}{s a p}} \quad \text{con} \quad t = 3 \sqrt{\frac{s}{I^2 \rho_0 a p}} \rho c$$

È quindi determinabile la condizione per la quale non si abbia la fusione del filo:

$$T_{fusione} > T_{eq}$$

Problema con \dot{u} gen ed h variabili con la temperatura.

Il caso piú generale possibile nell'ambito del modello utilizzato per la descrizione del fenomeno consiste nel considerare sia h che \dot{u} gen variabili con la temperatura. In questo caso l'equazione di bilancio globale si scrive:

$$\rho cs \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2 \rho_0}{s} (1 + \gamma \Delta T) - ap \Delta T^2$$

Come già fatto nei problemi precedentemente affrontati, si introducono le grandezze adimensionali

$$\theta = \frac{T - T_f}{\Delta T_{rif}} \quad \tau = \frac{t}{trif}$$

Anche in quest' ultimo caso non siamo in grado di definire a priori ΔT_{rif} e $trif$ per cui al momento lasciamoli incogniti per determinarli in seguito nella scrittura delle equazioni.

La condizione iniziale per il problema rimane la stessa utilizzata già nei casi precedenti, per cui:

$$T(t = 0) = T_f$$

Sostituendo nell'equazione di bilancio le variabili adimensionali otteniamo:

$$\rho cs \frac{\Delta T_{rif}}{trif} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{I^2 \rho_0}{s} (1 + \gamma \Delta T) - ap \Delta T^2$$

Scegliendo:

$$\Delta T_{rif}^2 = \frac{I^2 \rho_0}{sap} \quad trif = \frac{\rho cs}{\Delta T_{rif} * ap} \quad m^2 = \frac{I^2 \rho_0 \gamma}{\Delta T_{rif} * sap}$$

ed effettuando le opportune semplificazioni possiamo scrivere l'equazione in forma adimensionale:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 1 + m^2 \theta - \theta^2$$

Mentre la condizione iniziale diventa:

$$\theta(\tau = 0) = 0$$

L'equazione di bilancio scritta in forma adimensionale è una delle tre tipologie di equazioni di Riccati ovvero:

$$u' = P(z) + Q(z)u + R(z)u^2$$

Nel caso in esame $P(z) = 1$, $Q(z) = m^2$, $R(z) = -1$.

La soluzione per θ si trova definendo una funzione y tale che

$$\theta = -\frac{y'}{yR}$$

In questo modo otteniamo l'equazione:

$$Ry'' - (R' + QR)y' + R^2Py = 0$$

Che scritta in funzione dell'equazione per θ diventa:

$$-y'' + m^2y' + y = 0$$

La soluzione dell'equazione differenziale è del tipo:

$$y = C_1 e^{\frac{m^2 + \sqrt{m^4 + 4}}{2}\tau} + C_2 e^{\frac{m^2 - \sqrt{m^4 + 4}}{2}\tau}$$

Mentre la soluzione per θ data da $\frac{y'}{y}$ vale:

$$\theta = \frac{k_1 + Ck_2 e^{\sqrt{m^4 + 4}\tau}}{1 + C e^{\sqrt{m^4 + 4}\tau}}$$

Dove:

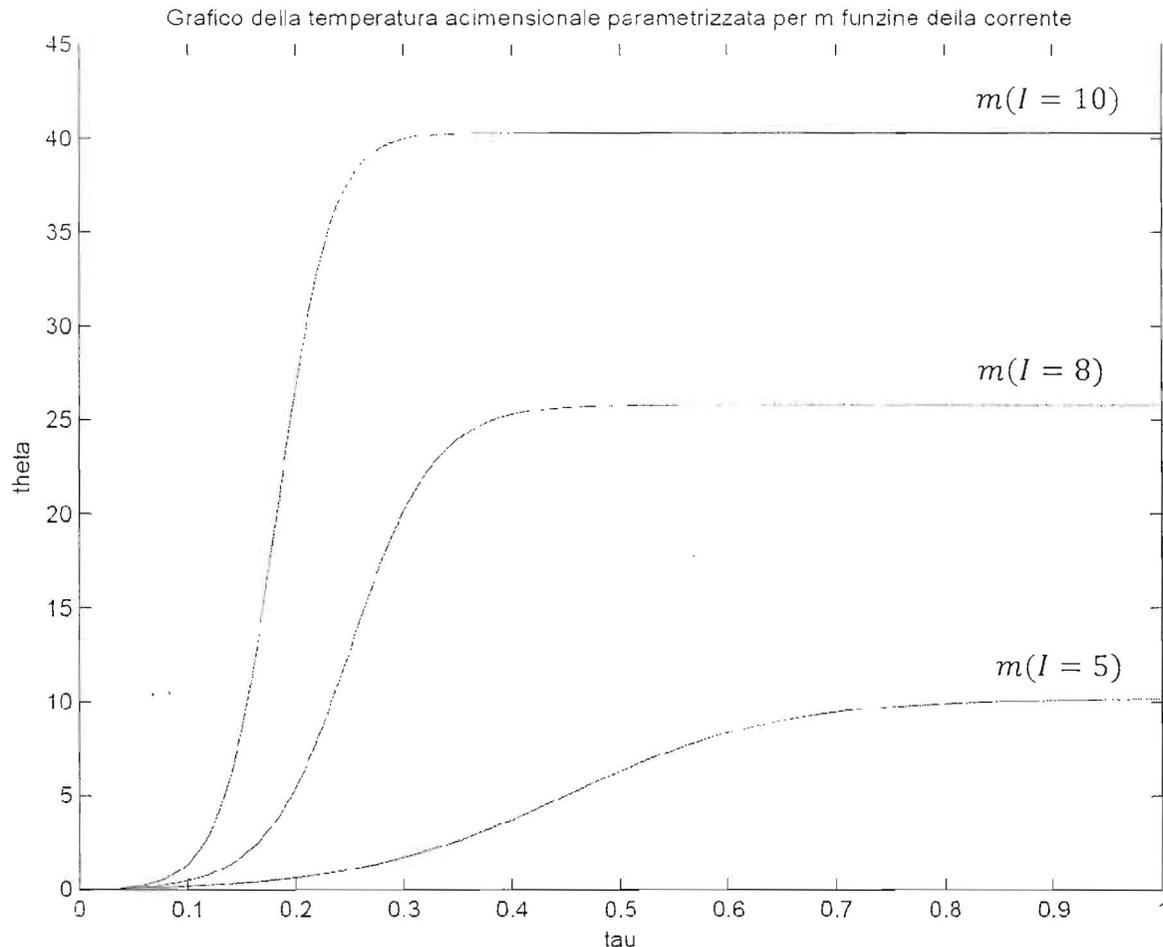
$$k_1 = \frac{m^2 - \sqrt{m^4 + 4}}{2} \quad k_2 = \frac{m^2 + \sqrt{m^4 + 4}}{2} \quad C = \frac{C_2}{C_1}$$

Per determinare la costante C applichiamo la condizione iniziale:

$$\theta(\tau = 0) = 0 \rightarrow \frac{k_1 + Ck_2}{1 + C} = 0 \rightarrow C = -\frac{k_1}{k_2}$$

Una volta determinata la costante C possiamo scrivere la relazione che descrive l'andamento di θ in funzione di τ :

$$\theta = \frac{k_1(1 - e^{\sqrt{m^4+4}\tau})}{1 - \frac{k_1}{k_2}e^{\sqrt{m^4+4}\tau}}$$



Dal grafico si osserva come per valori maggiori della corrente a parità di geometria del conduttore, delle sue proprietà fisiche e proprietà del fluido, la condizione di equilibrio termico si raggiunge per tempi più brevi. Questo perché all'aumentare della corrente aumenta la generazione che determina un incremento della temperatura più marcato il quale consente di raggiungere prima le condizioni ottimali per lo scambio termico convettivo in quanto quest'ultimo è legato proprio al salto termico $T_s - T_f$.

Verifichiamo ora che questa espressione ritorni il caso di generazione costante per $m \rightarrow 0$

In queste condizioni infatti:

$$k_1 \rightarrow -1 \quad \sqrt{m^4 + 4} \rightarrow 2 \quad -\frac{k_1}{k_2} \rightarrow 1$$

E dunque:

$$\theta = 1 - \frac{2}{e^{2\tau} + 1}$$

Un'altra osservazione che è doveroso fare è che nel caso in esame, considerando, cioè, generazione e coefficiente di scambio termico convettivo variabili con la temperatura, non esiste una condizione di fuga termica come nel caso di h costante poiché, all'aumentare della temperatura, la variazione di h consente di trovare sempre un equilibrio termodinamico. Il fenomeno fisico, come si può leggere dalle equazioni, è descritto anche dal modello matematico: Infatti, il denominatore dell'equazione per θ e cioè $1 - \frac{k_1}{k_2} e^{\sqrt{m^2+4}\tau}$ è sempre positivo dal momento che $e^{\sqrt{m^2+4}\tau}$ è sempre maggiore di 0 così come k_2 , mentre k_1 assume valori negativi per ogni m^2 . La θ massima a cui tende il sistema può essere calcolata facendo il limite per $\tau \rightarrow \infty$

$$\theta_{max} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{k_1 (1 - e^{\sqrt{m^2+4}\tau})}{1 - \frac{k_1}{k_2} (e^{\sqrt{m^2+4}\tau})} = k_2$$

Passando al campo di temperatura dimensionale otteniamo:

$$T = T_f + \frac{k_1 (1 - e^{\frac{\sqrt{m^2+4}}{\rho c s} \sqrt{\frac{l^2 \rho_0}{s a p}} t})}{1 - \frac{k_1}{k_2} e^{\frac{\sqrt{m^2+4}}{\rho c s} \sqrt{\frac{l^2 \rho_0}{s a p}} t}} \sqrt{\frac{l^2 \rho_0}{s a p}}$$

Da cui possiamo ricavare la temperatura massima che vale:

$$T_{max} = T_f + \sqrt{\frac{l^2 \rho_0}{s a p}} k_2$$

Questa temperatura così calcolata deve ovviamente essere inferiore alla temperatura di fusione del rame pari a 1083°C


```

% h completa e ugen variabile
A=1.651e-11;
a=A*I^2-0.15;
% h completa e ugen costante
h_completa=h;

h_completa=h;

% caso con ugen variabile ed h costante
m=(roz*I^2*gamma/(s*h_completa*p)); % caso con h cost
T=Tf+1*I*roz./((1-m)*s*h_completa*p)+I*exp(I.*(h_completa*p*(1-m)/(densita*c_spec*s)));
figure(1)
plot(L,T)
title('Temperatura per modello con ugen variabile ed h costante')
xlabel('L')
ylabel('T')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% caso con ugen ed h variabili con T
m_var=I*I*roz*gamma/(s*a*p*sqrt(I*I*roz/(s*a*p)));
c=sqrt(roz*I^2/(s*a*p));
k1=(m_var-sqrt(m_var^2-4))/2;
k2=(m_var+sqrt(m_var^2-4))/2;
T_var=((k1*(1-exp(L).^((sqrt(m_var*m_var-4)*a*p/densita/c_spec/s*c*L))))./(1-k1/k2*exp(L).^((sqrt(m_var^2-4))*a*p/densita/c_spec/s*c*L)))+Tf;
figure(2)
plot(L,T_var)
title('Temperatura per modello con h ed ugen variabili')
xlabel('L')
ylabel('T')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

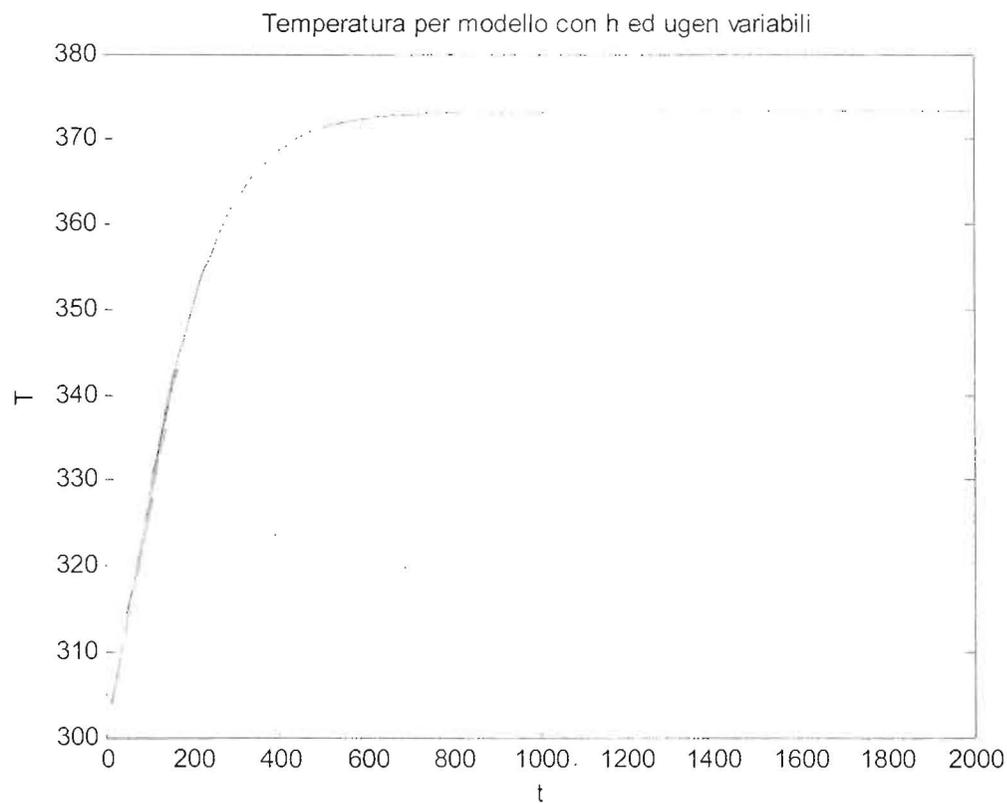
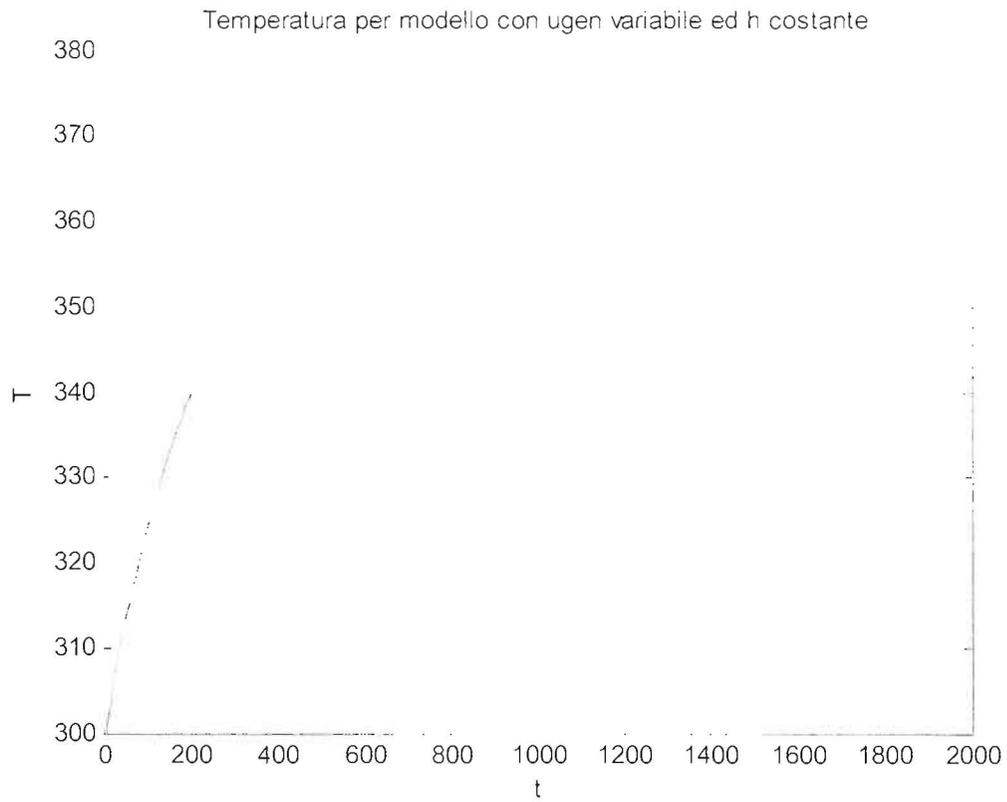
figure(3)
plot(L,T_var,L,T,'r')
title('Confronto della funzione di temperatura per i due modelli')
xlabel('L')
ylabel('T')

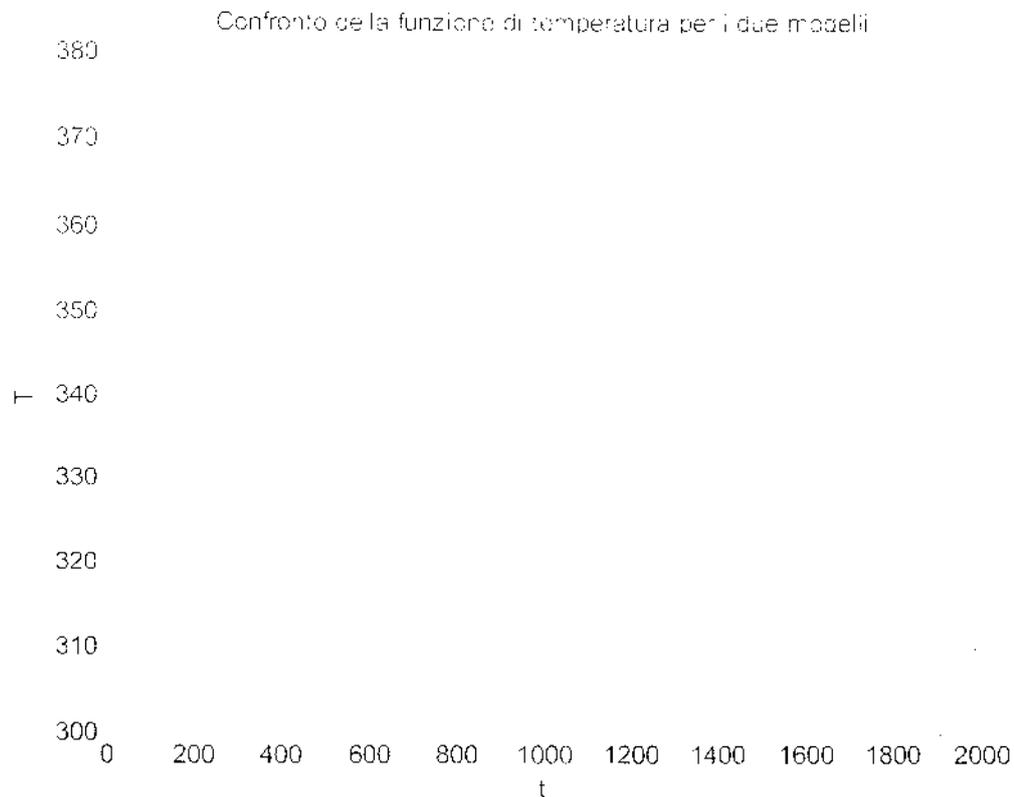
Tmassima_cost=Tf+1*I*roz/((1-m)*s*h_completa*p)

Tmassima_var=Tf-sqrt(I*I*roz/(s*a*p))*k2

```

I risultati ottenuti sono riassunti in tre grafici che mostrano i due profili di temperatura mettendoli anche a confronto:





Come si può vedere da quest'ultimo grafico che mette a confronto il risultato ottenuto con h variabile e quello ottenuto con h costante, nel primo caso si raggiunge la temperatura di equilibrio termodinamico più velocemente che rispetto al secondo in un tempo che è quasi la metà. Questo è quanto fisicamente ci si aspetta dal modello matematico in quanto è evidente che, se h aumenta con la temperatura, lo scambio termico diventa più efficiente e si raggiunge prima una condizione di equilibrio. La temperatura massima raggiunta è di circa 372 K in un tempo di poco inferiore ai 15 min.

Tutti i risultati ottenuti sono coerenti con la fisica del problema giustificando così le ipotesi fatte a monte; Infatti, nonostante le ipotesi semplificative, si è giunti a risultati verosimili eliminando, però, le difficoltà nel considerare la dipendenza funzionale dallo spazio che, come si è visto, è irrilevante ai fini computazionali.

Ciò è stato possibile grazie alla adimensionalizzazione, alla quantificazione delle grandezze caratteristiche del problema in esame e, soprattutto, alla conoscenza intuitiva e a priori, poi recuperata dal modello matematico, della fisica che ne regola l'evoluzione, capacità questa che non deve mancare ad un buon ingegnere.