

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO



FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

Tesina del corso di

TRASMISSIONE DEL CALORE

Docente Prof. Ing. Gennaro Cuccurullo

Concilio Maurizio, Matr.: 0620300217

Napoli Andrea, Matr.: 0620300205

## Traccia tesina

*Si studi in via approssimata mediante il metodo integrale il transitorio termico occorrente ad un manto di asfalto inizialmente a 200°C. Si schematizzi l'asfalto come un corpo semi-infinito.*

### **Introduzione**

Il seguente lavoro si prefigge lo scopo di studiare il transitorio termico, relativo ad un manto di asfalto inizialmente a 200°C, illustrando l'applicazione di differenti metodologie di sviluppo e di soluzione del problema retto da equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE).

Il primo capitolo introduce alla teoria del corpo semi-infinito, modello semplice ma di grande utilità nello studio dei primi istanti del fenomeno di evoluzione termica in corpi solidi con temperature imposte sul contorno o più in generale a contatto con fluidi (aria o acqua ad esempio), ed illustra la ricerca della soluzione esatta mediante il metodo delle soluzioni simili.

Il secondo capitolo espone l'applicazione del metodo integrale, valido supporto per la risoluzione di problemi che presentano soluzioni esatte di complessa determinazione, che consiste nel ricercare una soluzione approssimata di un'equazione differenziale alle derivate parziali, la quale il più delle volte porta a risultati più che accettabili dal punto di vista ingegneristico.

Il terzo capitolo introduce la teoria delle equazioni alle differenze finite, principale metodologia numerica per la soluzione di PDE, e ne illustra alcune applicazioni.

Infine nell'ultimo capitolo si estende il modello di corpo semi-infinito alla descrizione del transitorio termico di una lastra piana e si riassumono i risultati ottenuti con le diverse metodologie, al fine di evidenziare limiti e pregi delle stesse.

### **Capitolo 1 – Modello di corpo semi-infinito**

Il modello di corpo semi-infinito nasce per descrivere l'evoluzione del campo di temperatura in un solido la cui estensione occupa un semipiano, ed è pertanto caratterizzato da un'unica superficie esposta allo scambio termico. L'estensione indefinita del solido potrebbe suscitare perplessità poiché in prima battuta risulta difficile trovare nella pratica applicazioni di questo modello che si presenta come una trattazione analitica astratta, ma la forza e la validità di tale modello risiedono nel fatto che durante i primi istanti del fenomeno di conduzione termica la perturbazione introdotta su una delle superfici di un corpo, descrivibile attraverso modelli unidimensionali, non raggiunge l'altra superficie che di fatto rimane imperturbata.

Una semplice analisi del problema di un manto di asfalto inizialmente a 200°C rivela un caso pratico di applicazione del modello: all'istante iniziale la temperatura è di 200°C ed è uniformemente distribuita nel manto d'asfalto; man mano che il tempo trascorre si osserva come uno spessore sempre maggiore del manto è soggetto ad un decremento di temperatura.

Inizialmente ci si è posti l'obiettivo di analizzare dapprima il caso con coefficiente di scambio termico convettivo  $h$  infinito, con l'intenzione, successivamente, di utilizzare i risultati ottenuti come base di partenza per lo studio del caso con  $h$  finito. Tuttavia, in quest'ultimo caso, si è palesato uno scarso vantaggio dell'applicazione del metodo integrale, in quanto tale metodo a scapito di una soluzione approssimata dovrebbe permettere una facile risoluzione analitica del problema, ma in questo caso la risoluzione del problema ha portato ad una equazione non lineare da risolvere per iterazione. Si è scelto quindi di non riportare i risultati della risoluzione di questo tipo di problema e di concentrarsi sul caso di  $h$  infinito.

Fatta questa breve premessa si introduce in dettaglio il modello matematico.

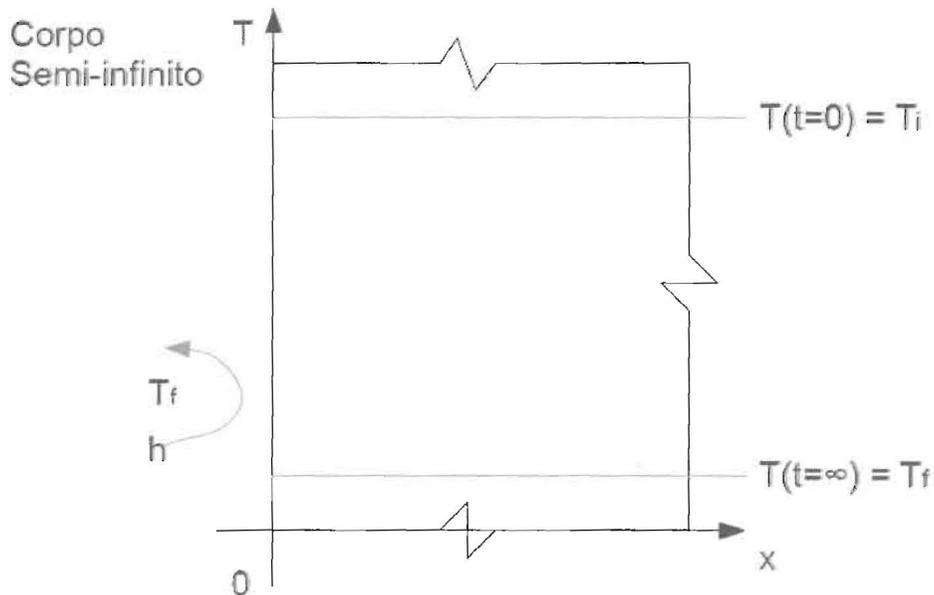
## Sommario

Traccia tesina .....	2
Introduzione .....	2
1 Modello di corpo semi-infinito .....	2
1.1 Schematizzazione del problema.....	3
1.2 Soluzione analitica esatta.....	4
2 Metodo integrale.....	8
3 Differenze finite.....	13
4 Confronto con lastra piana .....	17
4.1 Conclusioni, confronto dei metodi e considerazioni.....	20

## 1.1 Schematizzazione del problema

Considerando  $h$  molto grande, al limite tendente ad infinito.

All'istante iniziale la temperatura è di  $200^\circ\text{C}$  ed è uniformemente distribuita sul corpo:



Scelti gli assi come in figura si introduce il set di equazioni che descrive il problema in esame; l'equazione PDE della conduzione è corredata da due condizioni al contorno per la variabile spaziale e una per la variabile temporale.

- 1)  $T_t = \alpha T_{xx}$                       PDE
- 2)  $T(x=0, t) = T_f$             condizione al contorno  $x=0$
- 3)  $T(x \rightarrow \infty, t) = T_i$     condizione al contorno  $x \rightarrow \infty$
- 4)  $T(x, t=0) = T_i$             condizione iniziale

Si sceglie ora di adimensionalizzare il problema (al fine di renderlo più semplice); ciò comporta l'introduzione delle seguenti variabili adimensionali:

$$\theta = (T - T_f) / (T_i - T_f)$$

$$\xi = x / x_{rif}$$

$$\tau = t / t_{rif}$$

Dal processo di adimensionalizzazione della PDE si osserva che resta incognito il valore della lunghezza e del tempo di riferimento e si giunge solamente alla loro correlazione:

$$x_{rif}^2 = \alpha T_{rif}$$

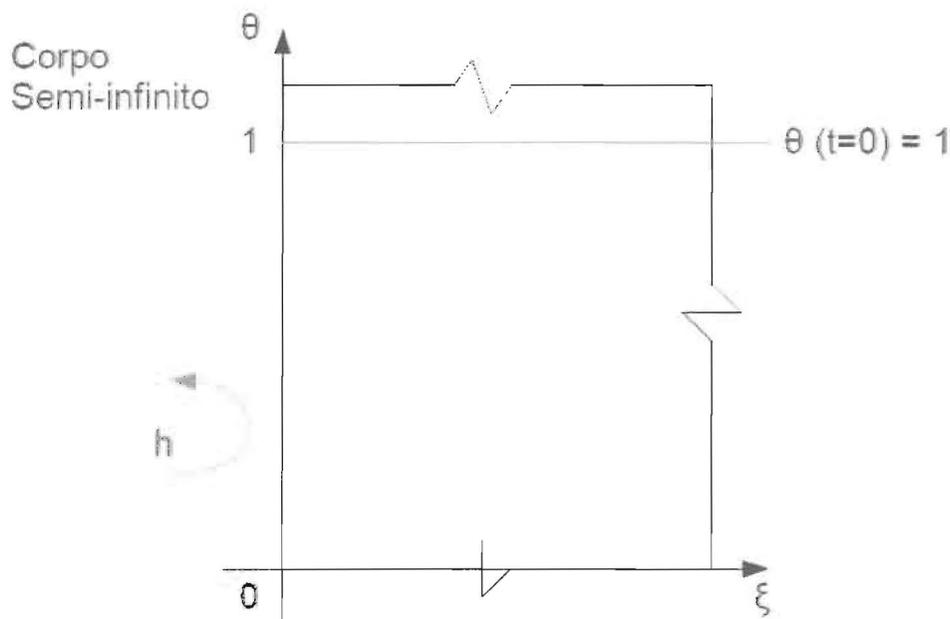
la perturbazione e quindi la profondità alla quale si avverte l'abbassamento della temperatura

$$1') \theta_{\xi\xi} = \theta_{\tau}$$

$$2') \theta(\xi = 0, \tau) = 0$$

$$3') \theta(\xi \rightarrow \infty, \tau) = 1$$

$$4') \theta(\xi, \tau = 0) = 1$$



## 1.2 Soluzione analitica esatta

Come si può vedere il “metodo di separazione delle variabili” non è applicabile poiché la 3’) non risponde ai requisiti di omogeneità sulle condizioni al contorno richiesti dal metodo.

Un problema lineare non omogeneo può invece essere sempre risolto in modo analitico, e tra le tecniche di soluzione il legame spazio-tempo induce a ricercare la soluzione mediante il “metodo delle soluzioni simili”.

Si ricercherà quindi la soluzione  $\theta(\xi, \tau)$  come funzione della sola variabile  $s = s(\xi, \tau)$ , dove  $s$  è detta, appunto, “variabile di similitudine”.

Il vantaggio è che  $s$  è un'unica variabile che contempla  $\xi$  e  $\tau$ , e se si riesce ad esprimere  $\theta$  in funzione della sola  $s$  allora il sistema alle derivate parziali (PDE) si semplificherà in un sistema ordinario (ODE).

Posta quindi :  $s = s(\xi, \tau) = \xi f(\tau)$  provo ad esprimere le due derivate parziali in funzione della  $s$ :

-derivata rispetto a  $\xi$ :

$$\mathcal{G}'_{\xi} = \frac{d\mathcal{G}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\xi} = \mathcal{G}' \cdot f(\tau)$$

da cui:

$$\mathcal{G}''_{\xi\xi} = \frac{d\mathcal{G}' \cdot f(\tau)}{ds} \cdot \frac{ds}{d\xi} = \mathcal{G}'' \cdot f^2(\tau)$$

dove

$$\mathcal{G}'' = \frac{d^2\mathcal{G}}{ds^2}$$

-derivata rispetto a  $\tau$ :

$$\mathcal{G}'_{\tau} = \mathcal{G}' \cdot \xi' \cdot f'(\tau) = \mathcal{G}' \cdot s' \cdot \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}$$

Dalla (1') si ottiene:

$$\mathcal{G}'' \cdot f^2(\tau) = \mathcal{G}' \cdot s' \cdot \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}$$

da cui:

$$\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' \cdot s' \cdot \frac{f'(\tau)}{f^3(\tau)} \quad (1''')$$

Affinché la (1''') risulti un'equazione solo nelle variabili  $\theta$  e  $s$ , implica che il gruppo  $f'/f^3$  che è funzione di  $\tau$  sia una costante:

$$\frac{f'(\tau)}{f^3(\tau)} = \pm C^2 \quad (5)$$

ed in particolare dalla soluzione della (5) si vede che la costante deve avere un valore negativo altrimenti si avrebbe una soluzione immaginaria.

Le condizioni al contorno invece divengono:

$$\theta(\xi = 0, \tau) = 0 \quad (2')$$

$$\theta(s=0) = 0$$

$$\theta(\xi \rightarrow \infty, \tau) = 1 \quad (3')$$

$$\theta(s \rightarrow \infty) = 1$$

$$\theta(\xi, \tau = 0) = 1 \quad (4')$$

$$\theta(s = \xi f(0) \rightarrow \infty) = 1 \quad \text{per } f(0) = \infty$$

e si osserva che le condizioni (3') e (4') confluiscono nella condizione  $\theta(s \rightarrow \infty) = 1$ .

Il problema, inizialmente descritto da una PDE, è ora diventato un sistema di due ODE con le relative condizioni al contorno:

$$f' f^3 = \pm C^2 \quad \text{con la C.C. } f(0) = \infty$$

$$\mathcal{G}' = -\mathcal{G}' s C^2 \quad \text{con le C.C.} \quad \theta(s=0) = 0 \quad \text{e} \quad \theta(s=\infty) = 1$$

Per valutare il segno della C si integra la prima ODE per separazione di variabili:

$$\frac{f'(\tau)}{f^3(\tau)} = -C^2 \quad (5)$$

$$f(0) = \infty \quad (4'')$$

ed dalla soluzione della (5), come anticipato, si osserva che la scelta di porre  $C < 0$  è dovuta al fatto che la  $f$  appartiene ad  $\mathbb{R}$ ; una scelta diversa di  $C$  ( $C > 0$ ) avrebbe comportato infatti una  $f$  appartenente al campo dei numeri complessi. Alla fine si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{f(\tau)} = C^2 \cdot \tau + A$$

La costante  $A$  si ottiene imponendo la condizione iniziale:

$$f(0) = \infty \quad \rightarrow \quad A = 0$$

da cui:

$$f = \frac{1}{C \sqrt{2\tau}}$$

Determinato quindi preventivamente il segno di  $c$  si può integrare la seconda ODE, e per farlo si introduce la variabile ausiliaria  $p = \theta'$ , che permette di scindere la ODE del secondo ordine in un sistema di due ODE di primo ordine:

$$p = \mathcal{G}'$$

e

$$p' = -psC^2$$

Integrando la seconda per separazione di variabili si ottiene:

$$\frac{dp}{ds} = -psC^2 \rightarrow \int \frac{dp}{p} = -C^2 \cdot \int s \cdot ds \rightarrow \ln\left(\frac{p}{c_1}\right) = -\frac{C^2 \cdot s^2}{2} \rightarrow p = c_1 \cdot e^{\left(-\frac{C^2 s^2}{2}\right)}$$

Sostituendo questo risultato nella prima ODE si ottiene:

$$d\mathcal{G} = c_1 \cdot e^{\left(-\frac{C^2 s^2}{2}\right)} \cdot ds$$

che integrata fornisce:

$$g(s) = c_1 \int_0^s e^{-\frac{C \cdot s'}{2}} \cdot ds + c_2$$

Dal risultato si riconosce un integrale di Gauss, per semplificare il tutto moltiplichiamo e dividiamo per  $C/\sqrt{2}$ :

$$\begin{aligned} g &= \frac{c_1 \sqrt{2}}{C} \int_0^s e^{-\frac{C \cdot s'}{2}} \frac{C \cdot ds}{\sqrt{2}} + c_2 = \frac{c_1 \sqrt{2}}{C} \cdot \int_0^{\frac{C \cdot s}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz + c_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{c_1 \sqrt{2}}{C} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{C \cdot s}{\sqrt{2}}} e^{-z^2} dz + c_2 \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} \cdot c_1}{2C} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{C \cdot s}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \end{aligned}$$

dove  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z'^2} dz'$  è detta funzione degli errori ed è indicata con  $\operatorname{erf}(z)$ , mentre il complemento a 1 di questa funzione viene indicato  $\operatorname{erfc}(z)$ .

Applicando le condizioni al contorno si ottiene:

$$\begin{aligned} g(s=0) &= 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi} \cdot c_1}{2C} \cdot \operatorname{erf}(0) + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ g(s \rightarrow \infty) &= 1 \rightarrow \frac{\sqrt{2\pi} \cdot c_1}{2C} \cdot \operatorname{erf}(\infty) = 1 \rightarrow c_1 = \frac{2C}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Riscriviamo la  $g(s)$ :

$$g(s) = \operatorname{erf}\left(\frac{C \cdot s}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{C \cdot \xi \cdot f(\tau)}{\sqrt{2}}\right)$$

Sostituendo il valore di  $f(\tau)$  trovato dalla soluzione della prima ODE:

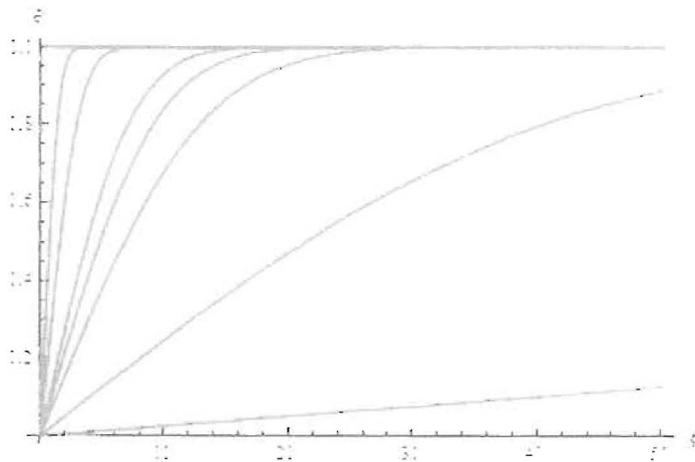
$$g(s) = \operatorname{erf}\left(\frac{C \cdot \xi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{C \sqrt{2\tau}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

Dalla soluzione si evidenzia che la scelta della costante è libera, quindi per evidente semplicità si pone pari a  $C = \sqrt{2}$ .

Il campo adimensionale di temperatura si presenta quindi nella forma:

$$g(s) = \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

e volendo riportare l'andamento in un grafico:



“s” in funzione di variabili adimensionali è uguale a:  $s = \xi / (2\tau)$

mentre in funzione di variabili dimensionali :  $s = x / [2\alpha t]$

Il profilo di temperatura in forma dimensionale può così essere scritto:

$$T = T_f + (T_i - T_f) \operatorname{erf}(s)$$

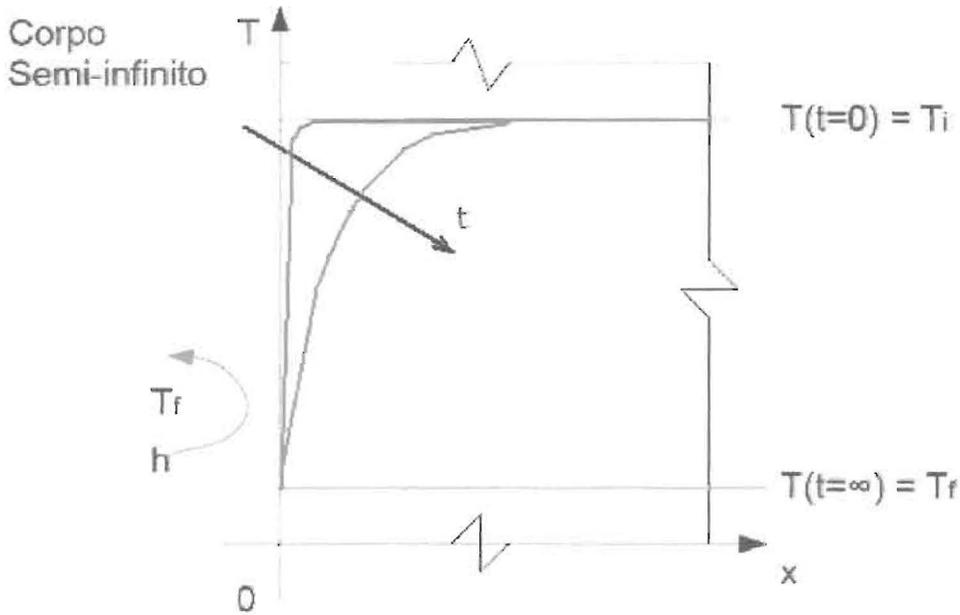
## Capitolo 2 – Metodo integrale

Si descrive nel seguito la soluzione in via analitica approssimata con il metodo integrale: in generale si ricorre a questo metodo quando la soluzione esatta (o la sua manipolazione) risulta complicata, per cui diviene più semplice, e quindi più conveniente, determinare una soluzione approssimata, consci del fatto che così facendo commettiamo un certo margine di errore. Appare ovvio che più un profilo si avvicina al profilo della soluzione esatta, minore sarà l'errore di approssimazione.

Imporre la validità dell'equazione (1) significa imporre che in ogni fettina della lastra sia soddisfatta l'equazione di continuità dell'energia. Con il metodo integrale si vuole soddisfare non localmente il bilancio d'energia ma in tutto il dominio di integrazione:

$$\int_0^{\infty} \vartheta_{\xi\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \vartheta d\xi$$

La soluzione approssimata  $\vartheta_\xi$  deve comunque dipendere dalla coordinata spaziale, anche se l'equazione integrale contiene solo termini in  $\tau$ . Si deve pertanto scegliere una famiglia di curve rispetto alla  $\xi$  che soddisfatti le condizioni al contorno.



Da una prima analisi del profilo si può vedere che quest'ultimo all'istante iniziale  $t=0$  si trova alla temperatura  $T_i$ , mentre a  $0+dt$  un sottilissimo strato del corpo a contatto col fluido si è portato alla temperatura  $T_f$ , e che ad un  $x$  sempre più a destra la temperatura si porta di nuovo a  $T_i$  con un andamento a prima vista di tipo esponenziale. Allo scorrere del tempo il profilo risulta sempre più stirato senza tuttavia cambiare forma, così che ad un  $x$  sempre più a destra si raggiunge sempre la temperatura  $T_i$ .

Da questa analisi qualitativa si vanno a ipotizzare i seguenti profili che si basano tutti essenzialmente su un andamento di tipo esponenziale.

Dall'andamento qualitativo della temperatura si ipotizza una dipendenza del tipo:

$$\vartheta_s = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{a(\tau)}\right)$$

Integro l'equazione (1') tra 0 e  $\infty$  :

$$\int_0^{\infty} \vartheta_{\xi\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \vartheta_{\tau} d\xi$$

Effettuando le opportune operazioni e sostituendo i valori delle derivate:

$$\vartheta_{\xi} \Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} \vartheta_{\tau} d\xi$$

$$\vartheta_{\tau} = -\frac{\xi}{a(\tau)^2} \frac{da(\tau)}{d\tau} \exp\left(-\frac{\xi}{a(\tau)}\right)$$

$$g_{\xi} = -\frac{1}{a(\tau)} \exp\left(-\frac{\xi}{a(\tau)}\right)$$

Si ottiene:

$$-\frac{1}{a(\tau)} = \int_0^{\xi} \left[ -\frac{\xi}{a(\tau)^2} \frac{da(\tau)}{d\tau} \exp\left(-\frac{\xi}{a(\tau)}\right) \right] d\xi$$

L'integrale a secondo membro si risolve per parti:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} \left[ -\frac{\xi}{a(\tau)^2} \frac{da(\tau)}{d\tau} \exp\left(-\frac{\xi}{a(\tau)}\right) \right] d\xi = \\ & = -\frac{1}{a(\tau)^2} \frac{da(\tau)}{d\tau} \left[ -a(\tau)\xi \exp\left(-\frac{\xi}{a(\tau)}\right) \right]_0^{\xi} - \int_0^{\xi} a(\tau) \exp\left(-\frac{\xi}{a(\tau)}\right) d\xi = -\frac{da(\tau)}{d\tau} \end{aligned}$$

e alla fine si ottiene:

$$-\frac{1}{a(\tau)} = \frac{da(\tau)}{d\tau}$$

Separiamo le variabili:

$$a(\tau) da(\tau) = d\tau$$

Dalla quale si ottiene, una volta effettuata l'integrazione:

$$a(\tau) = \sqrt{2\tau + C_2} \quad (5')$$

Imponendo la condizione (4').

$$g(\xi, 0) = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{a(0)}\right) = 1$$

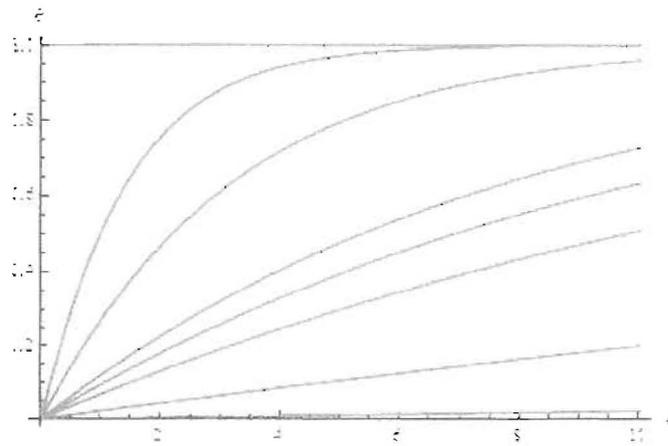
Da cui:  $a(0) = 0$

imponendo questa condizione nella (5') si ha:  $C_2 = 0 \rightarrow a(\tau) = \sqrt{2\tau}$

da cui la legge:

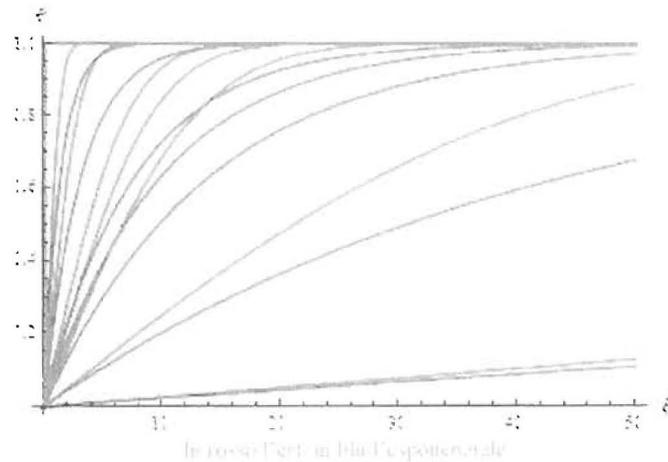
$$g = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\tau}}\right)$$

Implementandola graficamente, in un diagramma  $\theta$ - $\xi$  al variare del tempo, si ottiene:



dal diagramma si evidenzia l'evoluzione della diminuzione della temperatura nel corpo all'aumentare del tempo.

Confrontiamo ora questo risultato, prescindendo da considerazioni di carattere quantitativo che verranno esposte nella parte finale di questo lavoro, con la soluzione esatta:



Vogliamo ora cercare di ottenere una soluzione approssimata più accurata ipotizzando un profilo dato da una combinazione di esponenziali, quali la tangente iperbolica:

$$g_s = \operatorname{tgh}\left(\frac{\xi}{a(\tau)}\right) = \frac{e^{\frac{\xi}{a(\tau)}} - e^{-\frac{\xi}{a(\tau)}}}{e^{\frac{\xi}{a(\tau)}} + e^{-\frac{\xi}{a(\tau)}}}$$

Riprendendo la:

$$1') \theta_{\xi\xi} = \theta_\tau$$

Si vanno a esplicitare le derivate:

$$g_s \Big|_0^\infty = \frac{1}{a(\tau)} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{\xi}{a(\tau)}\right)^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a(\tau)}$$

$$g_\tau = \frac{a(\tau)'}{a(\tau)^2} \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\cosh\left(\frac{\sqrt{\tau}}{a(\tau)}\right)^2}$$

L'integrale di quest'ultima diventa

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_\tau d\xi &= \int_0^1 \frac{a(\tau)'}{a(\tau)^2} \cdot \frac{\xi}{\cosh\left(\frac{\xi}{a(\tau)}\right)^2} \cdot d\xi = a(\tau)' \cdot \left[ \ln\left(\cosh\left(\frac{\xi}{a(\tau)}\right)\right) - \frac{\xi}{a(\tau)} \operatorname{tgh}\left(\frac{\xi}{a(\tau)}\right) \right]_0^1 = \\ &= a(\tau)' \cdot \left[ \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{a(\tau)}} + e^{-\frac{1}{a(\tau)}}}{2}\right) - \frac{\sqrt{\tau}}{a(\tau)} \frac{e^{\frac{1}{a(\tau)}} - e^{-\frac{1}{a(\tau)}}}{e^{\frac{1}{a(\tau)}} + e^{-\frac{1}{a(\tau)}}} \right]_0^1 = -a(\tau)' \cdot \log(2) \end{aligned}$$

Il risultato appena ottenuto è stato ricavato ipotizzando che si abbia  $a(\tau) > 0$  (perché altrimenti l'integrale tenderebbe a infinito), ottenendo così:

$$-\frac{1}{a(\tau)} = -\frac{da(\tau)}{d\tau} \cdot \log(2)$$

Separiamo le variabili:

$$a(\tau) da(\tau) = \frac{1}{\log(2)} d\tau$$

Da cui si ha:

$$\frac{a(\tau)^2}{2} = \frac{1}{\log(2)} \tau + c_0 \quad \text{da cui si ottiene:} \quad a(\tau) = \pm \sqrt{\frac{2}{\log(2)} \tau + c_1}$$

Ove il segno davanti alla radice andrà preso positivo (essendo per ipotesi  $a(\tau) > 0$ ), mentre la costante  $c_1$  si ricava dalla condizione iniziale che in termini di  $a(\tau)$  si traduce:

$$g(\xi, 0) = 1 \rightarrow a(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

Si ha:

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\log(2)} \tau}$$

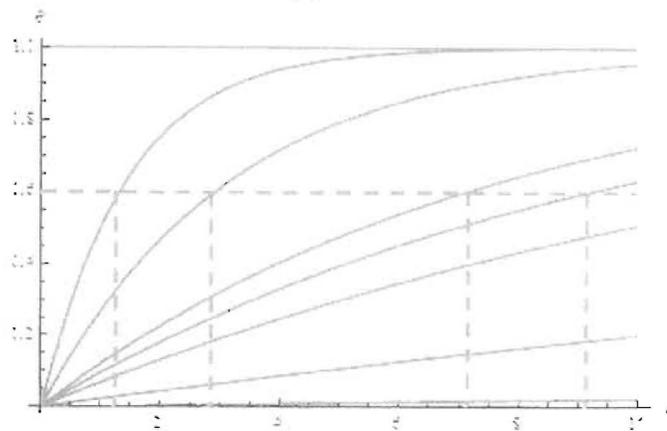
da cui:

$$g_s = tgh \left( \frac{\xi}{\sqrt{\frac{2}{\log(2)} \tau}} \right)$$

Rappresentiamo ora quest'ultima per diversi tempi:

Ci preme ora evidenziare che, prescindendo dal livello di approssimazione ottenuto con i due profili, si ottiene un andamento del profilo di temperatura coerente con la soluzione esatta. Infatti, all'aumentare del tempo, per ottenere lo stesso valore di temperatura bisogna spostarsi più a destra nello spazio, e di una quantità che va con la  $\sqrt{\tau}$ ; ovvero per ottenere lo stesso valore di temperatura a diversi tempi sia nella soluzione reale che nelle soluzioni approssimate, individuate

col metodo integrale, si palesa la relazione:  $\frac{\xi}{\sqrt{\tau}} = \text{costante}$



Un altro tipo di analisi potrebbe farsi osservando la riduzione di temperatura ad un  $x$  fissato.

### Capitolo 3 - Differenze finite & programma in CPL

La relazione che regola il fenomeno in esame è un tipico esempio di equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, a coefficienti costanti, del primo ordine nel tempo e del secondo ordine nello spazio (monodimensionale, in quanto secondo l'ipotesi di corpo semi-infinito le altre dimensioni si ritengono infinite, motivo per cui i gradienti di temperatura lungo queste ultime sono nulli). Tale relazione rientra nella categoria delle equazioni differenziali cosiddette paraboliche.

Volendo effettuare in questa sede una integrazione numerica, per la ricerca della soluzione dell'equazione tra i diversi metodi di risoluzione ci avvaliamo del metodo alle differenze finite. Tale metodo è utile quando dobbiamo risolvere numericamente equazioni ordinarie anche se spesso è usato come schema di avanzamento nel tempo per problemi alle derivate parziali (caratteristica che sfrutteremo anche in questa sede). Le differenze finite sono di gran lunga il metodo più semplice e intuitivo tra tutti e permettono anche una facile analisi di convergenza.

Il "metodo alle differenze finite" si fonda sulla discretizzazione del dominio sul quale è definita la funzione di interesse e sul concetto dell'approssimazione del valore della derivata della funzione in un punto  $x$ , con combinazioni lineari dei valori della funzione stessa in un intorno di  $x$ , desunti con l'utilizzo dell'espansione in serie di Taylor.

Essenzialmente si sostituisce, nell'equazione da approssimare, ad ogni derivata un rapporto incrementale finito; ciò permette, ad esempio, di trasformare un'equazione alle derivate parziali in un problema algebrico.

Dato un problema definito in uno spazio monodimensionale  $(x,t)$ , si definisce una griglia di punti nel piano  $(x, t)$  fissando un passo di discretizzazione spaziale  $dx=h$  e temporale  $dt=k$ , in questo modo la griglia sarà data dai punti nodali del piano  $(x_m; t_n) = (m*h; n*k)$ , per valori interi positivi  $m$  e  $n$ .

Per esempio, per una funzione regolare  $u(x,t)$  la derivata temporale può essere approssimata sia dalla differenza in avanti (forward):

$$D_+(u(x, t)) = \frac{\partial u_+}{\partial t} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\Delta t}$$

Oppure da una all'indietro:

$$D_-(u(x, t)) = \frac{\partial u_-}{\partial t} = \frac{u(x_m, t_n) - u(x_m, t_{n-1})}{\Delta t}$$

O ancora da una di tipo centrale (ottenibile come media aritmetica delle due approssimazioni precedenti):

$$D_c(u(x, t)) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_{n-1})}{2\Delta t}$$

Per ottenere delle espressioni approssimanti le derivate di ordine superiore, si possono combinare gli operatori differenziali discreti relativi agli ordini inferiori.

Ad esempio, per ottenere un'approssimazione della derivata seconda, si può scrivere:

$$D^2(u(x, t)) = \frac{1}{\Delta t} [D_+(u(x_m, t_n)) - D_-(u(x_m, t_n))] = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - 2u(x_m, t_n) + u(x_m, t_{n-1}))}{\Delta t^2}$$

Nell'ambito delle differenze finite occorre individuare gli schemi che meglio si prestano per la discretizzazione dell'equazione nei domini spaziale e temporale.

Facendo ora riferimento all'equazione del calore, indicando con  $U$  la temperatura:

$$U_t - kU_{xx} = 0$$

Che può essere riscritta in termini di differenze finite secondo diversi schemi, se ne riportano di seguito alcuni appartenenti alla categoria di schemi a singolo step:

- nell'individuare uno schema la cosa più semplice è approssimare la derivata temporale con una differenza forward e la derivata seconda spaziale con una differenza centrata seconda, otteniamo così uno schema esplicito:

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\Delta t} = k \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)}{\Delta x^2}$$

- sostituiamo la derivata forward con una derivata backward, lasciando invariata l'approssimazione spaziale schema implicito

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\Delta t} = k \frac{u(x_{m+1}, t_{n+1}) - 2u(x_m, t_{n+1}) + u(x_{m-1}, t_{n+1})}{\Delta x^2}$$

- una generalizzazione naturale dei metodi precedenti è data da una media dei due ottenendo lo schema di Crank-Nicolson (anche questo è uno schema implicito):

$$\frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\Delta t} = \frac{k}{2} \left[ \frac{u(x_{m+1}, t_{n+1}) - 2u(x_m, t_{n+1}) + u(x_{m-1}, t_{n+1})}{\Delta x^2} + \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)}{\Delta x^2} \right]$$

Di questi schemi si può verificare la stabilità effettuando un'analisi di Von Neumann, di cui ci si limita a descriverne brevemente i risultati.

Lo schema esplicito è di ordine 1 nel tempo e 2 nello spazio, e per avere stabilità richiede che deve

essere rispettata la condizione:  $\frac{k * dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2}$

Questa condizione è abbastanza restrittiva poiché, se vogliamo ad esempio dimezzare il passo spaziale (al fine di ottenere una maggiore accuratezza), essa ci impone di prendere un quarto del passo temporale, ossia un piccolo cambiamento nel passo temporale produce in pratica un comportamento molto diverso della soluzione approssimata.

Questo è il motivo per cui le equazioni paraboliche vengono trattate con schemi impliciti, che si presentano incondizionatamente stabili, ma risultano meno agevoli da implementare del corrispondente schema esplicito. Infatti conoscendo il valore di  $U(x_m, t_n)$  non è immediato il calcolo di  $U(x_m, t_{n+1})$ .

In particolare per la nostra applicazione, come anche in uso generale, si è optato per l'utilizzo dello schema di Crank-Nicolson perchè a scapito di un onere computazionale di poco superiore allo schema implicito backward permette di ottenere un'accuratezza di ordine 2.

Si riporta nel seguito il programma che risolve il problema in esame nella forma adimensionale, implementato utilizzando il software di calcolo CPL.

```

USE rfmt
USE rtchecks
USE gnuplot

REAL L=90
REAL tempomax=10
INTEGER M=250
INTEGER N=4100
REAL K=1
REAL alfa=0
REAL beta=1

ARRAY(0..M) OF REAL U=0,U1=0,x=0
REAL dx=L/M
REAL dt=tempomax/N
DO x(i)=dx*i FOR ALL i

```

```

SUBROUTINE BuildMat(ARRAY(+,*) OF REAL A^)
  LOOP FOR i=1 TO M-1
    A(i,+1)=-0.5*K/dx^2
    A(i,+0)=1/dt+K/dx^2
    A(i,-1)=-0.5*K/dx^2
  REPEAT LOOP
  A(0,0)=1
  A(M,0)=1
END BuildMat

```

```

SUBROUTINE BuildRHS(ARRAY(*) OF REAL rhs^)
  rhs=0
  LOOP FOR i=1 TO M-1
    rhs(i)=U1(i)/dt+0.5*K/dx^2*[U1(i+1)-2*U1(i)+U1(i-1)]
  REPEAT LOOP

  rhs(0)=alfa
  rhs(M)=beta
END BuildRHS

```

```

ARRAY(0..M,0..N) OF REAL Usol
ARRAY(0..M,-1..1) OF REAL A
ARRAY(0..M) OF REAL rhs
BuildMat(A)
LUdecomp A
DO U1(i)=1 FOR ALL i
OPENGRAPH
  LOOP FOR i=0 TO N
    BuildRHS(rhs)
    U=A\rhs
    PLOT(U,x)
    Usol(+,i)=U
  U1=U
  REPEAT LOOP
CLOSEGRAPH

```

```

!-----
!-----calcolo la soluzione vera dell'equazione per ogni x e t-----
!-----

```

```

!----definisco la funzione degli errori con Newton-Cotes del 2° ordine
REAL FUNCTION f(REAL a)=(2*EXP(-a^2))/sqrt(PI)
REAL FUNCTION ERF(REAL e)
REAL de=0,erf=0
de=e/1000;
INTEGER i=0
DO
  ei=1*de
  erf=erf+((de)/3)*(f(ei)+4*f(ei+de)+f(ei+2*de))
  i=i+2
WHILE ei<e
RETURN erf
END ERF

```

```

ARRAY(0..M,0..N) OF REAL SOL
ARRAY(0..N) OF REAL t1=0
DO t1(1)=dt+1 FOR ALL 1

REAL e=0
LOOP FOR l=1 TO N
  LOOP FOR i=0 TO M
    e=x(i)/(2*SQRT(t1(1)))
    SOL(i,l)=ERF(e)
  
```

```

!----implementa la funzione degli errori ERF
  REPEAT LOOP
REPEAT LOOP

!-----ricerca dell'errore relativo massimo tra sol vera e sol cn diff fin
ARRAY(0..M,0..N) OF REAL ERR

LOOP FOR j=1 TO N
  LOOP FOR i=1 TO M
ERR(i,j)=MAX(ABS((SOL(i,j)-Usol(i,j)))/(SOL(i,j)))
  REPEAT LOOP
REPEAT LOOP

REAL errore=0
errore=MAX(ERR)
WRITE BY NAME errore

OPENGRAPH("prova.gnu")
WRITE TO gnuplot "set xlabel 'x';set ylabel 'teta'"
WRITE TO gnuplot "set multiplot"
SHOWGRAPH
PLOT(Usol(*,10),x)
SHOWGRAPH
PLOT(Usol(*,600),x)
SHOWGRAPH
PLOT(Usol(*,1500),x)
SHOWGRAPH
PLOT(Usol(*,4000),x)
SHOWGRAPH
READ
CLOSEGRAPH

OPENGRAPH("errore.gnu")
WRITE TO gnuplot "set xlabel 'x';set ylabel 'errore'"
WRITE TO gnuplot "set multiplot"
RANGE(MIN(x)..MAX(30),MIN(ERR)..[MAX(ERR)-0.01])
PLOT(ERR(*,1),x)
SHOWGRAPH
PLOT(ERR(*,10),x)
SHOWGRAPH
PLOT(ERR(*,100),x)
SHOWGRAPH
PLOT(ERR(*,400),x)
SHOWGRAPH
PLOT(ERR(*,1000),x)
SHOWGRAPH
PLOT(ERR(*,2500),x)
SHOWGRAPH
READ
CLOSEGRAPH

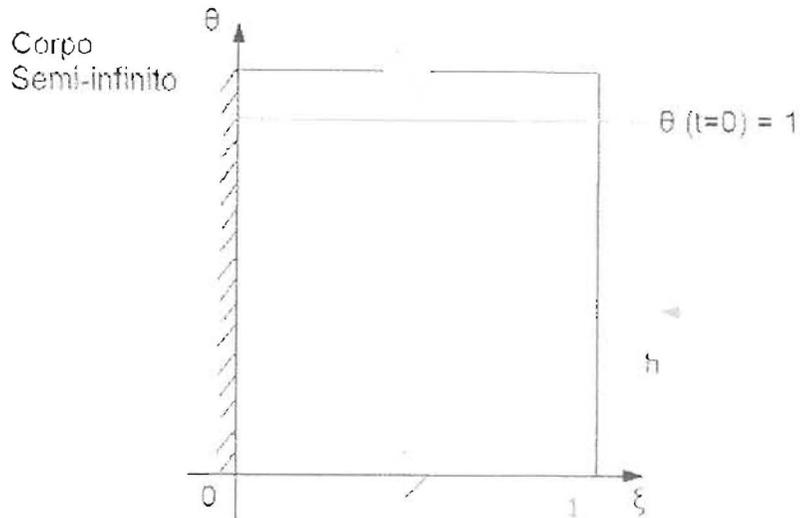
```

Il confronto con la soluzione vera è riportato nella parte finale.

## Capitolo 4 - Confronto con lastra piana

Volendo estendere il problema ad un caso reale si sono ricercate le dimensioni caratteristiche del tappeto d'usura della pavimentazione stradale. Si è evidenziato che lo spessore del manto di asfalto è di circa 3 cm, dimensione che paragonata alle altre risulta di gran lunga inferiore, da qui l'idea di schematizzare il manto d'asfalto come una lastra piana inizialmente alla temperatura  $T_i$ , con

condizione di simmetria del profilo:



$$(1) \theta_{\xi\xi} = \theta_{\tau}$$

$$(2) \theta_{\xi}(\xi = 0, \tau) = 0$$

$$(3) \theta(1, \tau) = 0$$

$$(4) \theta(\xi, \tau = 0) = 1$$

la cui soluzione è individuata con il metodo di separazione delle variabili, ed è nota.

$$\mathcal{G}(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi(2n+1)} \cdot \cos(\lambda_n \xi) \cdot \exp(-\lambda_n^2 \tau)$$

$$\text{con } \lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$$

Ora per avere da quest'ultima la soluzione per tempi piccoli si dovrebbero considerare infiniti termini, ma dal punto di vista ingegneristico ci basta scegliere un valore di  $n$  grande e implementare la sommatoria in un programmino per ottenere la soluzione.

orditura in pietra lavica

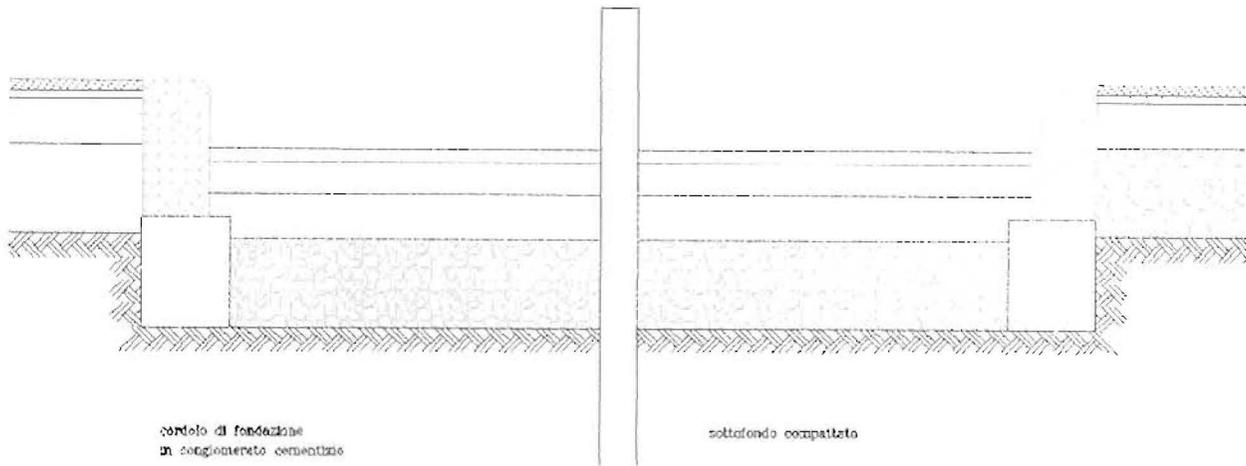
lappete di usura spessore cm.3

strato di collegamento (binder) spessore cm.7

strato di base spessore cm.10

legli-resanti spessore cm.20

orditura in pietra lavica



Possiamo quindi, preso un n grande (es. 200), confrontare le due soluzioni e individuare l'istante di tempo oltre il quale il nostro modello non è più in grado di rappresentare il fenomeno. Dai risultati si è evidenziato che fino ad un tempo pari a  $t=0,1 \cdot \text{trif} [s]$ , con un errore del 3% circa, è valida l'approssimazione di corpo semi-infinito.

Volendo ora ritornare al caso dimensionale si riportano le caratteristiche relative ad un manto di asfalto individuate in letteratura, ipotizzando il materiale come omogeneo:

calore specifico c	$0.92 \cdot 10^3 \frac{J}{kgK}$
Densità $\rho$	$1.00 \div 1.18 \frac{g}{cm^3}$
Conducibilità K	$0.55 \frac{kcal}{hm^{\circ}C} = 1.16 \frac{W}{m^{\circ}C}$
Diffusività termica $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}$	$1.106 \cdot 10^{-6} \frac{s}{m^2}$

Nel calcolo della diffusività termica si è assunta una densità pari a  $1.14 \text{ g/cm}^3$ , valore compreso nel range di definizione della stessa.

Ora ricordando che l'adimensionalizzazione ci ha portato un legame tra la  $x_{rif}$  e la  $t_{rif}$  del tipo:

$$x_{rif}^2 = \alpha \cdot t_{rif}$$

riferendoci allo spessore tipico di un manto di asfalto, possiamo scegliere come  $x_{rif}=0,03 \text{ m}$ , da cui individuiamo il valore del tempo di riferimento:

$$t_{rif} = \frac{x_{rif}^2}{\alpha} = \frac{0.03^2}{1,106 \cdot 10^{-6}} = 813.7s = 13.6 \text{ min}$$

Il valore di  $t_{rif}$  riferito alla scala dei tempi ci dice se il fenomeno è dell'ordine dei secondi, minuti, ore, etc..., nel nostro caso  $t_{rif}$  ci dice che il fenomeno si misura in minuti

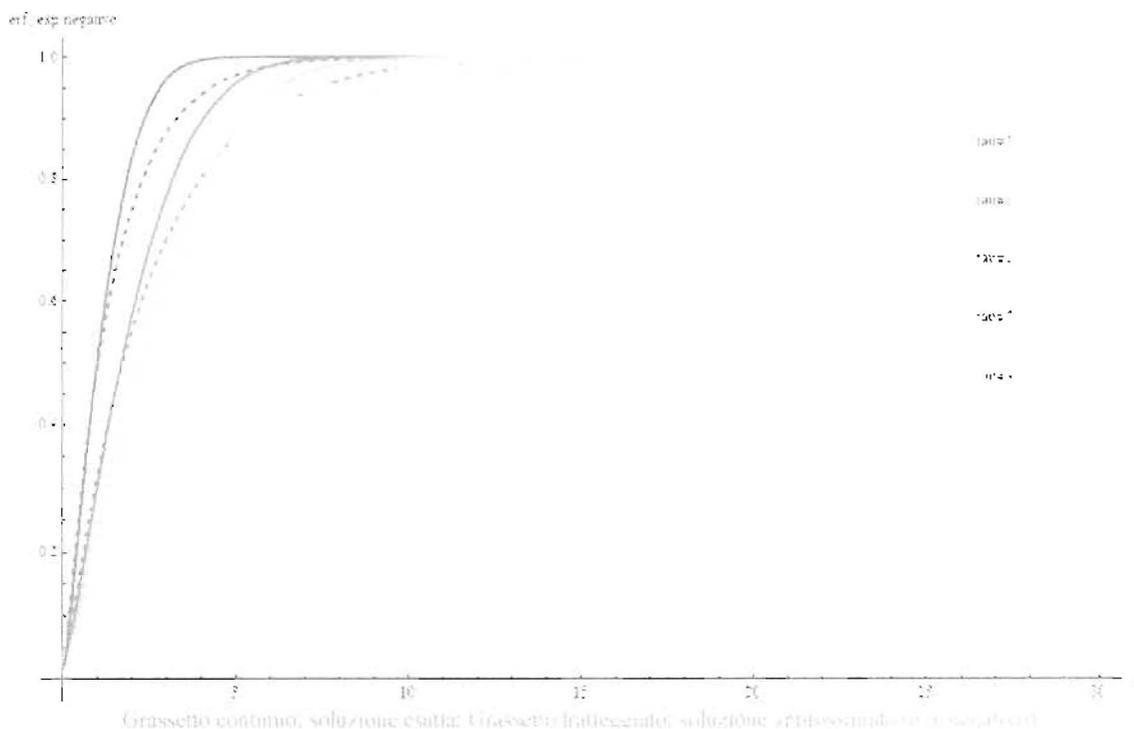
Noto il valore della  $t_{rif}$  possiamo quindi esplicitare il tempo oltre il quale il nostro modello non rappresenta più una valida approssimazione:

$$t = 0.1 \cdot t_{rif} = 81.37s = 1,36 \text{ min}$$

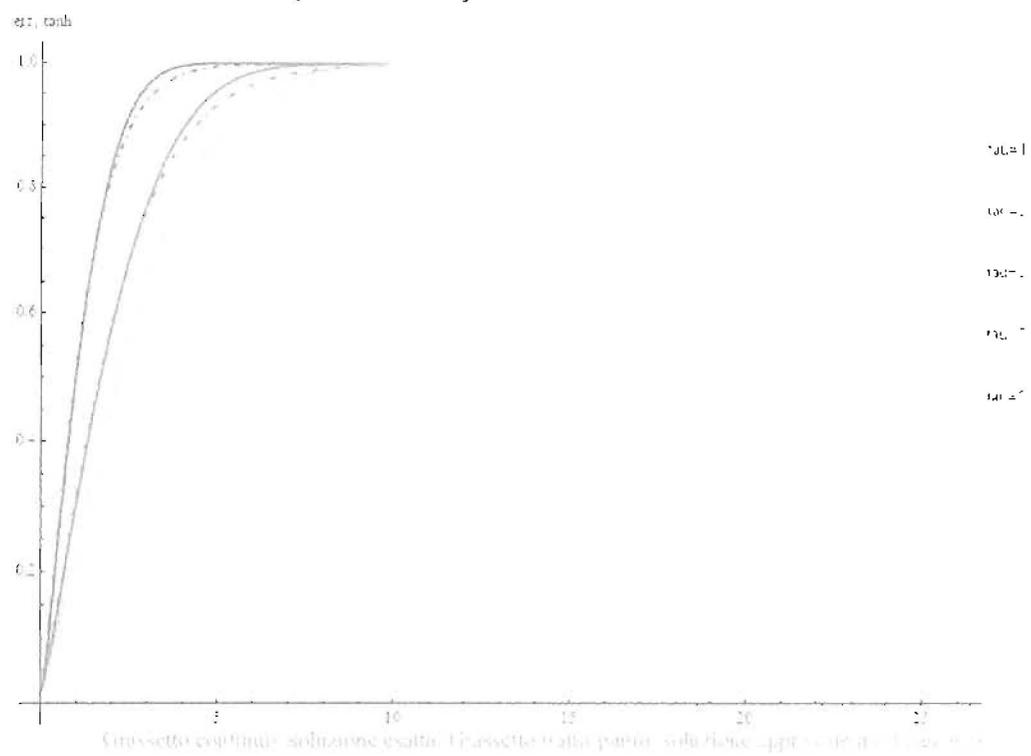
#### 4.1 Conclusioni, confronto dei metodi e considerazioni.

Dal confronto tra la soluzione analitica del problema (rappresentata dalla funzione degli errori) e le funzioni approssimanti da noi ipotizzate (esponenziale negativa e tangente iperbolica), scaturiscono i seguenti diagrammi, i quali mostrano come e di quanto si discostano le seconde dalla prima, dalla parete del corpo semi-infinito fino a una profondità di  $30 \xi$ , avendo parametrizzato il tempo a diversi istanti  $\tau$ . Nei primi due possiamo vedere come si discostano le soluzioni approssimate da quella reale:

nel primo caso:  $\mathcal{G} = 1 - \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2\tau}}\right)$

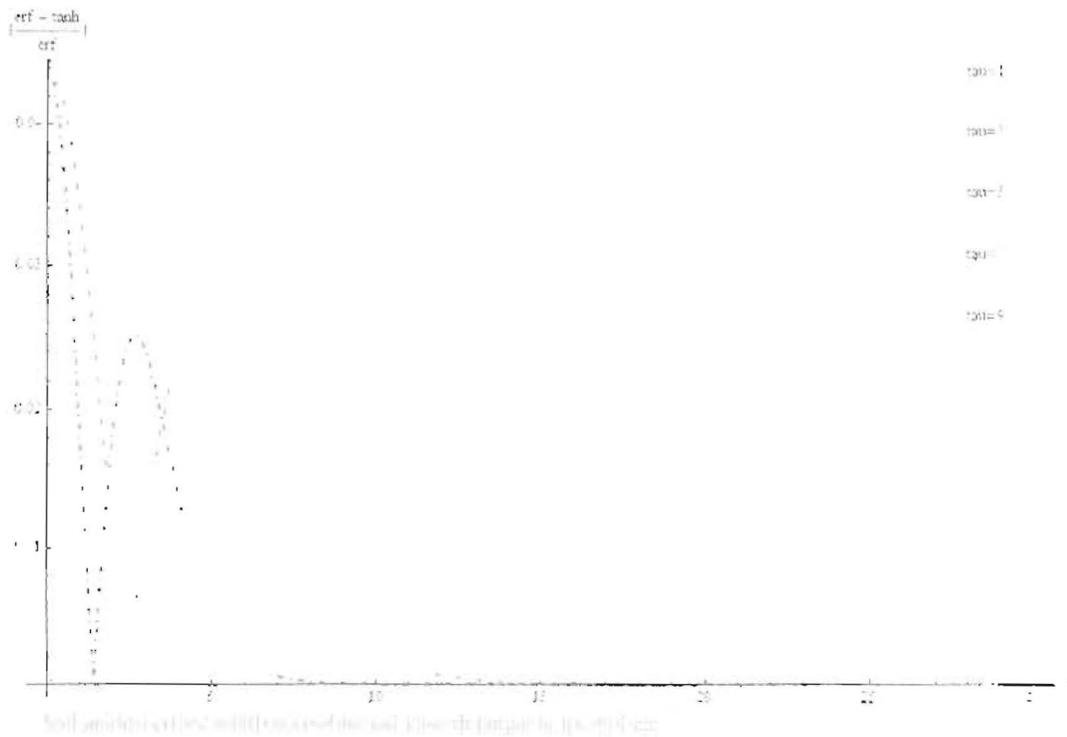
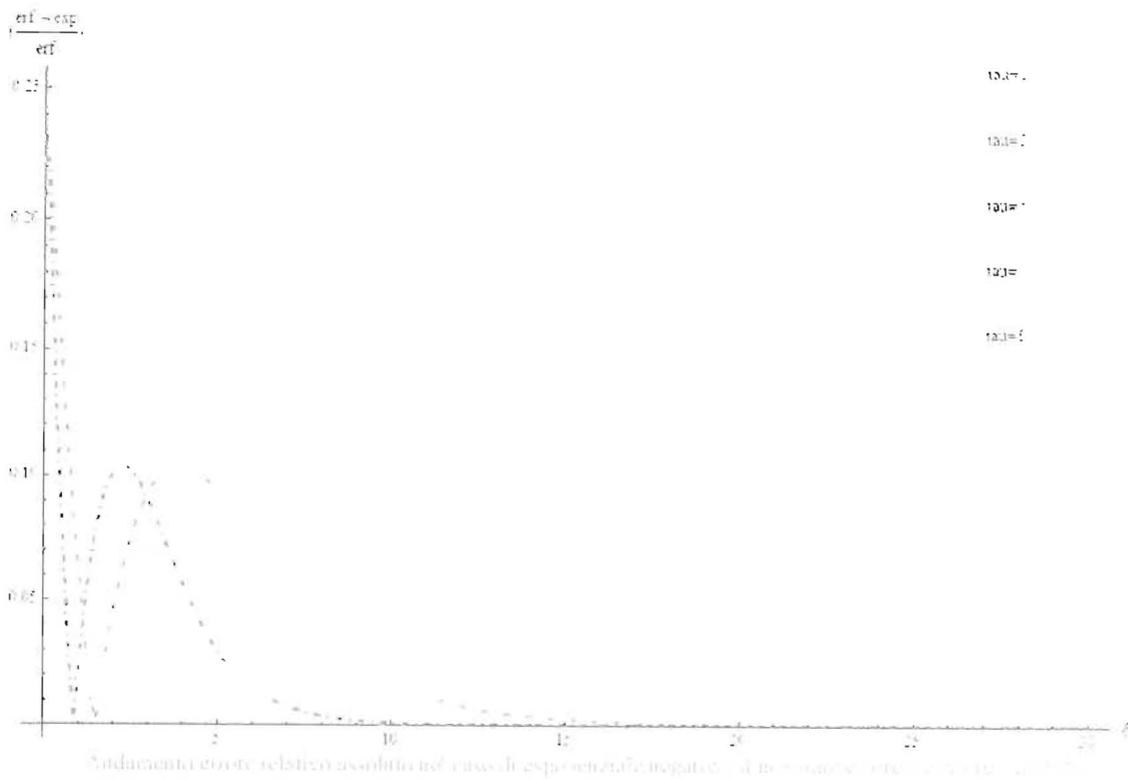


Nel secondo caso: 
$$g_s = 1gh \left( \frac{\xi}{\sqrt{\frac{2}{\log(2)} \tau}} \right)$$

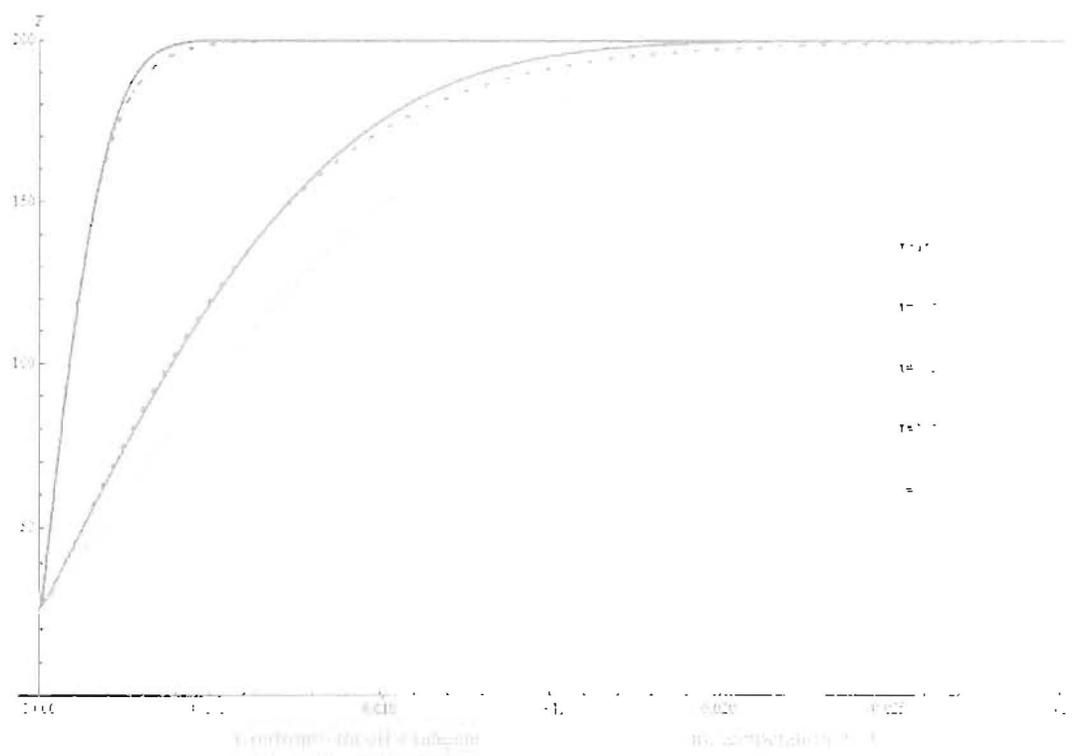
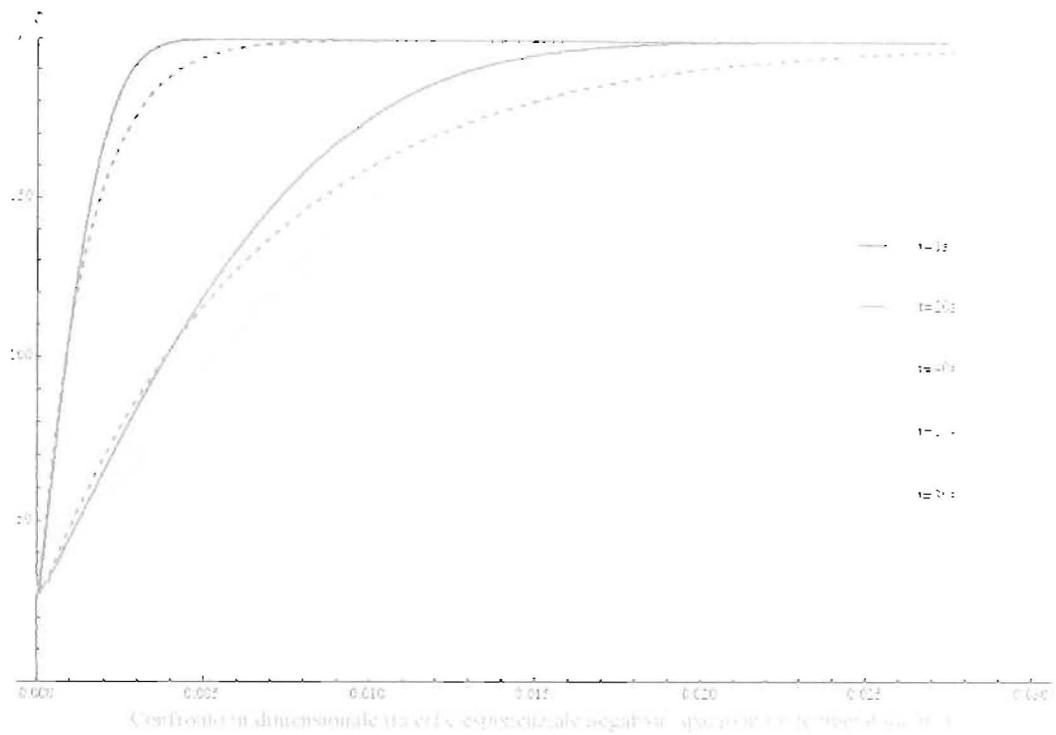


Si nota già qualitativamente come in effetti la funzione tangente iperbolica approssimi la soluzione analitica con uno scostamento minore, come è messo in evidenza dai seguenti diagrammi che mostrano, nello stesso intervallo spaziale e ai medesimi istanti di tempo, l'andamento dell'errore relativo commesso rispettivamente nel caso dell'esponenziale negativa e della tangente iperbolica. L'errore relativo viene riportato in valore assoluto:

$$errore\_relativo = \left| \frac{erf - f}{erf} \right|$$



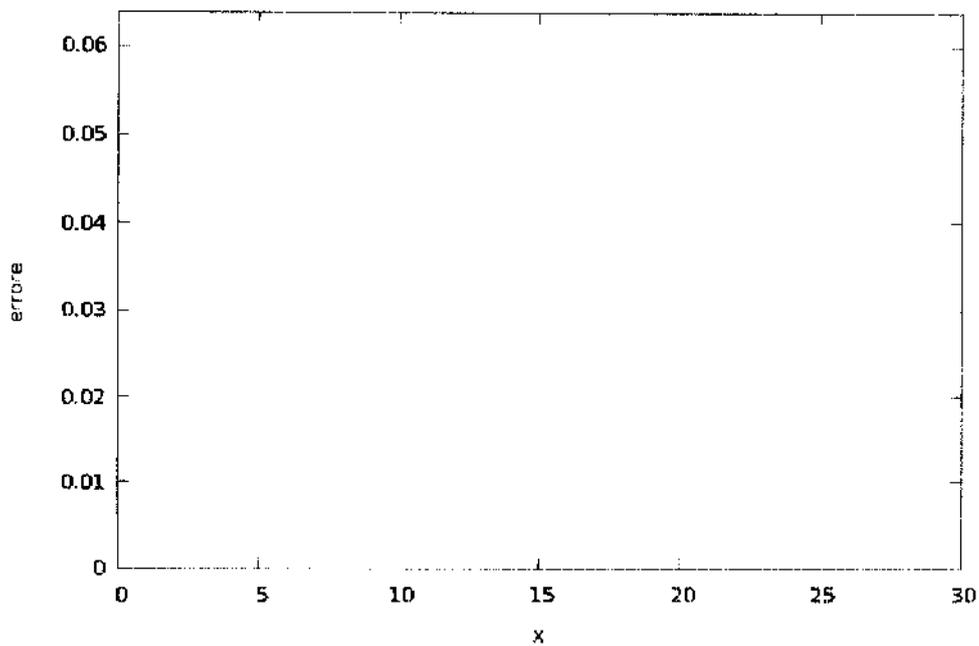
In particolare nel secondo caso notiamo come effettivamente l'approssimazione sia molto buona, essendo lo scostamento massimo dell'ordine del 4%. E' possibile mostrare i risultati in dimensionale per avere un'idea più immediata:



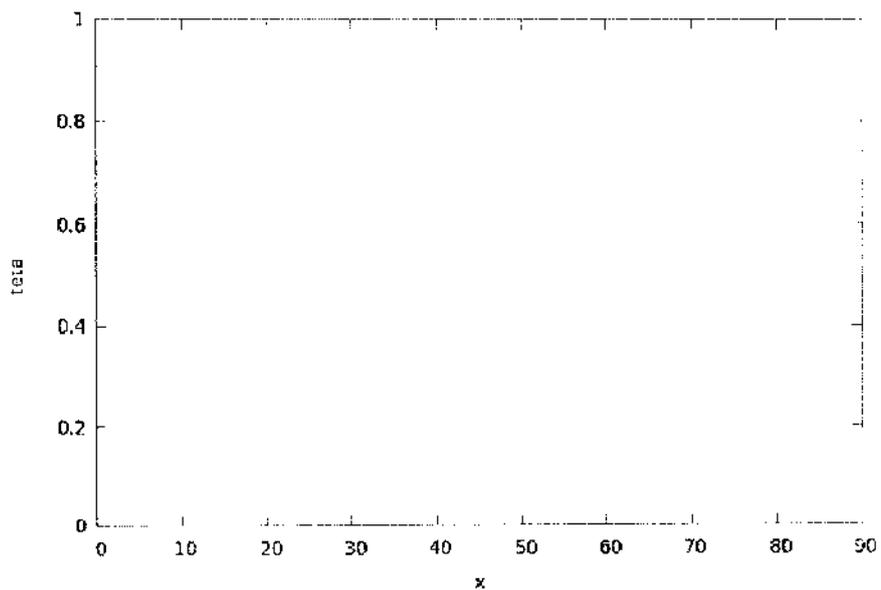
Privilegiamo come trial function per il metodo integrale la funzione tangente iperbolica, che ci fornisce un errore massimo del 4%.

Per quanto concerne invece il metodo delle differenze finite questo presenta un errore massimo dell'ordine del 6%, a vantaggio però di una semplice implementazione del programma e della possibilità di risoluzione di problemi affini con diverse condizioni al contorno ed iniziali.

Si riporta di seguito come nei casi precedenti l'errore relativo, e l'andamento del profilo per diversi valori del tempo adimensionale  $\tau$ .



Errore relativo in valore assoluto dell'eri rispetto alla soluzione individuata col metodo delle differenze finite



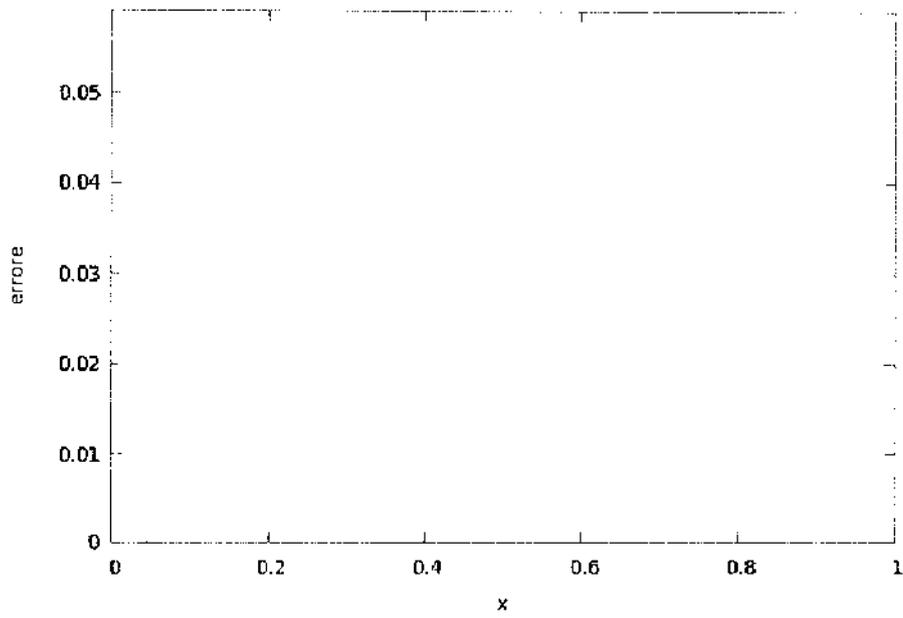
Andamento del profilo di temperatura adimensionale individuato col metodo delle differenze finite

Si riportano di seguito gli errori massimi che il metodo integrale, il quale presenta come trial function la tangente iperbolica, ed il metodo alle differenze finite forniscono fino ad un tempo pari a  $0.1 \cdot \text{trif}$  rispetto alla soluzione della lastra piana.

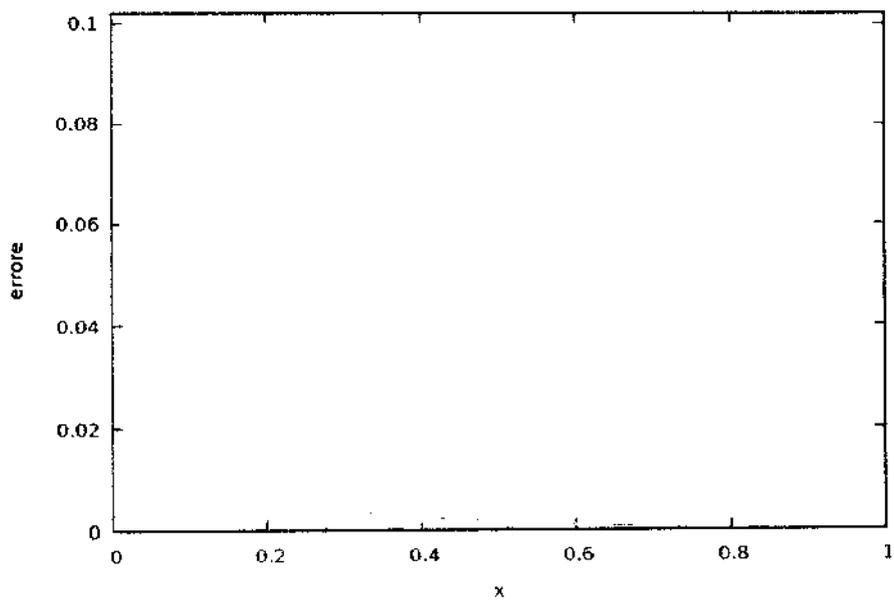
Errore\_tangente\_iperbolica= 4,4%

Errore differenze finite= 9,6%

Infine si rappresenta l'andamento dell'errore relativo rispetto alla soluzione della lastra piana a diversi tempi, per i due metodi sopra citati:



Errore relativo in valore assoluto di soluzione della lastra piana rispetto alla soluzione individuata col metodo integrale, con trial function la tangente iperbolica



Errore relativo in valore assoluto di soluzione della lastra piana rispetto alla soluzione individuata col metodo delle differenze finite