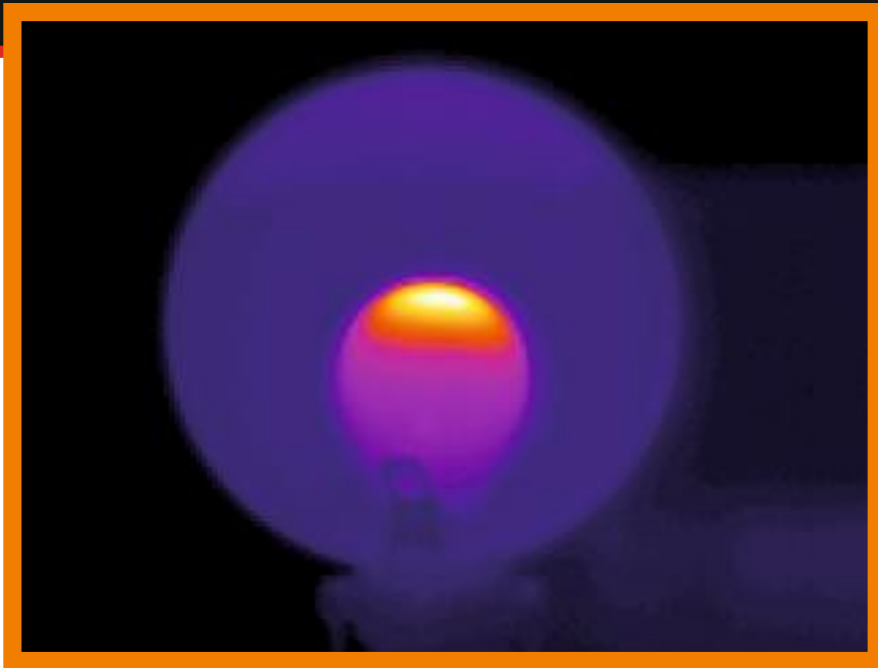


Gennaro Cuccurullo

Pier Giorgio Berardi

Elementi di  
**Termodinamica  
e trasmissione del calore**

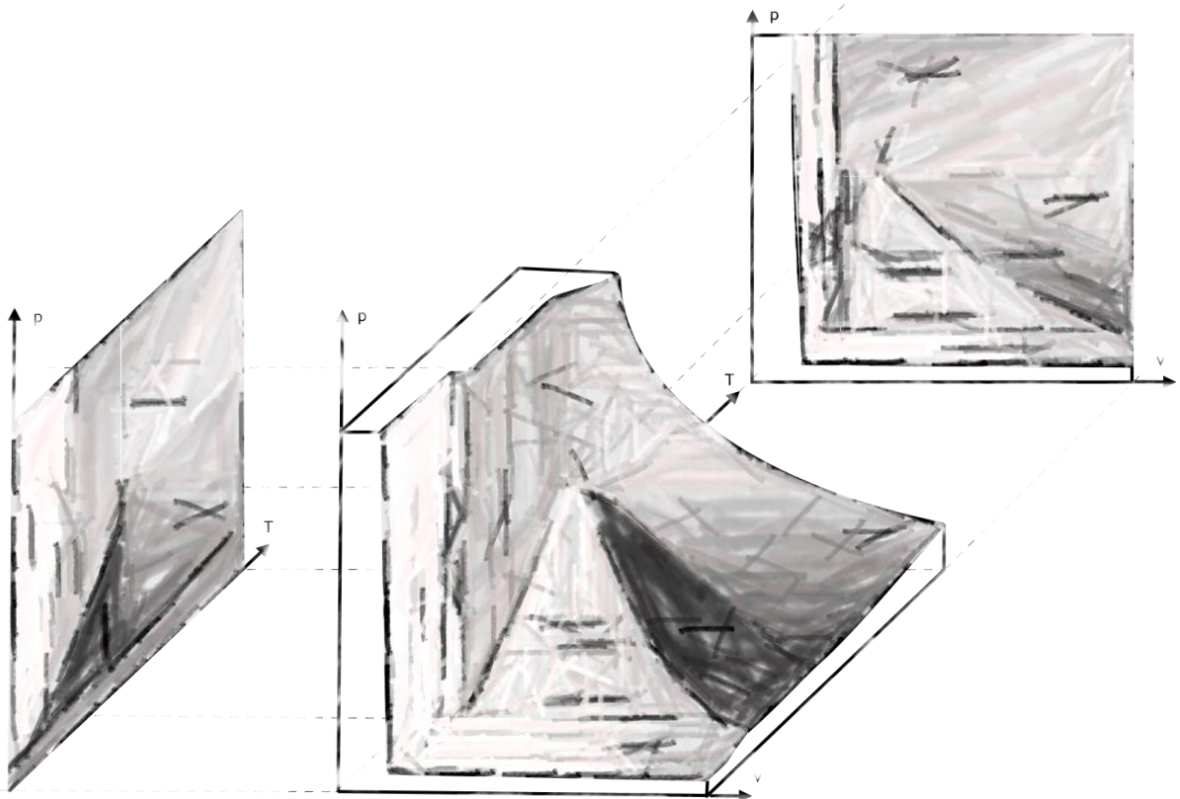
con prime applicazioni agli  
impianti termotecnici



in copertina: termografia di una lampadina

# Parte I

# Termodinamica



La termodinamica è la scienza che studia non solo le trasformazioni di calore in lavoro, come suggerito dal nome, ma anche i trasferimenti di altre forme di energia e gli effetti che questi producono sui corpi oggetto del trasferimento.

La termodinamica è una delle scienze della fisica macroscopica, le sue elaborazioni prescindono cioè dalla conoscenza microscopica della struttura della materia. Non si hanno “istantanee” dei moti particellari ma, operando su scale di tempo e spazio notevolmente più grandi di quelle caratteristiche di questi, se ne ottengono automaticamente delle medie i cui effetti sono sperimentabili dai nostri sensi; ad esempio, pressione e temperatura non rivestono alcun significato da un punto di vista microscopico dove, come noto dalla teoria cinetica dei gas, possono associarsi rispettivamente alla variazione della quantità di moto ed alla velocità quadratica media delle molecole. I principi a cui si perviene hanno validità generale almeno in un contesto nel quale i nostri sensi “rispondono”. Rispetto a questi, dunque, la materia può essere riguardata come distribuita con continuità attraverso una regione di spazio: la più piccola particella considerabile sarà grande quanto basta per contenere un numero di molecole tale per cui le medie statistiche siano ancora significative. Operativamente, la condizione si realizza allorchè il numero di Knudsen  $Kn = \lambda/L_{\text{rif}} < 10^{-2}$ , essendo  $L_{\text{rif}}$  la dimensione caratteristica del volume considerato e  $\lambda$  il cammino libero medio molecolare. Nella quasi totalità delle applicazioni ingegneristiche tale ipotesi non costituisce affatto una limitazione dal momento che, tipicamente, per un solido o un liquido il numero di molecole è dell'ordine di  $10^{23}/\text{cm}^3$ , mentre per un gas, ad esempio aria in condizioni ambiente, di  $10^{19}$ .

Ipotesi  
del continuo

## 1. Definizioni

Lo studio termodinamico richiede necessariamente di identificare una parte del mondo fisico che si vuole osservare o controllare riguardo agli scambi di energia che la contraddistinguono. Questa porzione del mondo fisico d'interesse, detta sistema, può essere definita in termini di:

- massa di controllo, cioè una prefissata quantità di materia invariante nel tempo ma con volume variabile per effetto di superfici mobili o deformabili che non sono mai attraversate da massa;
- volume di controllo, cioè una prefissata regione di spazio il cui volume e la cui posizione non variano nel tempo<sup>1</sup> ma caratterizzata dal contenere una massa variabile a causa di flussi di massa entranti e/o uscenti dal sistema stesso.

Il sistema è confinato da pareti reali o immaginarie a massa nulla dette superfici di controllo. Tali pareti separano il sistema da tutto il mondo fisico a esso complementare che è detto ambiente.

Lo studio termodinamico sarà affrontato inizialmente identificando il sistema come massa di controllo; ciò è conseguenza del fatto che tale approccio si rivela più semplice di quello riferito al volume di controllo per l'assenza di flussi di massa. All'approccio della massa di controllo ci si riferirà nei primi quattro capitoli. L'estensione ai sistemi individuati secondo l'approccio del volume di controllo avverrà nel Capitolo 5.

sistema

ambiente

<sup>1</sup> almeno nei limiti della presente trattazione

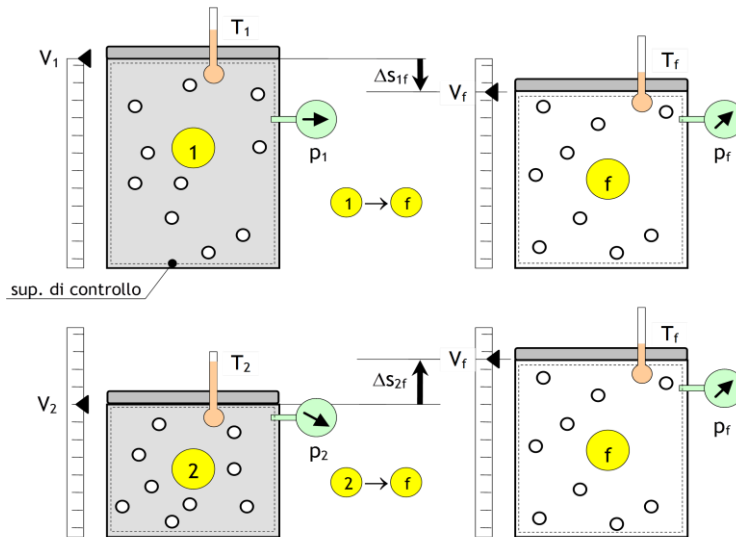


Figura 1  
Proprietà, stato  
e trasformazione

Identificato il sistema, occorre descriverlo in maniera oggettiva per valutare compiutamente le trasformazioni cui questo va incontro a fronte degli scambi di energia che lo vedranno coinvolto. La descrizione del sistema avviene specificando quantitativamente il valore di alcune sue caratteristiche dette proprietà. Si definisce stato di un sistema quella condizione in cui sono determinate in maniera univoca tutte le proprietà atte a descrivere il sistema indipendentemente dalla sua storia, ossia indipendentemente da come il sistema ha raggiunto lo stato considerato. Lo stato termodinamico di un sistema è quello descritto in termini di proprietà che siano in linea di principio misurabili dall'interno del sistema: in tal caso le proprietà sono dette proprietà di stato o coordinate termodinamiche. Ad esempio, la posizione e la velocità di un sistema rispetto a un riferimento inerziale sono delle proprietà (meccaniche) ma non possono riguardarsi come proprietà di stato.

Intuitivamente, il numero di proprietà utili alla descrizione del sistema si definisce in conseguenza del contesto in esame: ad esempio, poiché nella presente trattazione saranno studiati sistemi costituiti da sostanze pure, cioè di composizione chimica uniforme ed invariabile, svanisce la necessità di descrivere la composizione del sistema. Parimenti, poiché saranno considerati sistemi che possono scambiare energia solo sotto forma di calore e di lavoro meccanico, la descrizione dello stato in termini di proprietà elettriche, magnetiche o chimiche non è significativa. Questi sistemi, detti semplici compressibili, sono macroscopicamente omogenei, isotropi, chimicamente inerti ed elettricamente neutri.

Limitata l'analisi ai sistemi semplici compressibili, si consideri un gas, sostanza pura, contenuto in un cilindro delimitato da un pistone, Figura 1. La scelta del sistema non è univoca: si può considerare il solo gas, il gas ed il pistone oppure tutto il cilindro. Scelto il gas come sistema (semplice compressibile), alcune grandezze che ne caratterizzano lo stato termodinamico sono note dall'esperienza perché misurabili: il volume occupato dal gas,  $V$ , la massa,  $m$ , o il numero di moli,  $n$ , la pressione,  $p$ , e la temperatura,  $T$ . Come sarà più chiaro in avanti, allo scopo di descrivere compiutamente lo stato termodinamico del sistema è necessario introdurre altre due grandezze di stato: l'energia interna,  $U$ , e l'entropia,  $S$ . La termodinamica offrirà il modo di caratterizzare numericamente queste ultime due grandezze di stato che non risultano direttamente misurabili. Per comodità si introduce una ulteriore grandezza, l'entalpia,  $H = U + pV$ , proprietà di stato in quanto combinazione di proprietà di stato.

Una ulteriore classificazione può attribuirsi alle proprietà sopra elencate; alcune, dette grandezze estensive, si caratterizzano per l'assumere valori linearmente dipen-

stato  
termodinamico

sostanza pura,  
sistemi semplici  
compressibili

denti dalla massa del sistema, tra queste la massa stessa, il volume, l'energia totale del sistema, l'entalpia e l'entropia. Le grandezze estensive godono quindi della proprietà additiva nel senso che il valore della grandezza che compete ad un sistema riguardabile come somma di più sottosistemi, è pari alla somma dei valori assunti in ogni sottosistema. Al contrario, le restanti proprietà, dette intensive, sono caratterizzate dal mantenersi invariate rispetto all'estensione, tra queste la pressione e la temperatura. Per ogni grandezza estensiva,  $G$ , si può introdurre una corrispondente grandezza specifica<sup>1</sup>,  $g$ , cioè riferita all'unità di massa:  $g = G/m$ ; se il sistema è non omogeneo la grandezza specifica viene definita su base locale,  $g = dG/dm$ , essendo  $dm$  la massa più piccola considerabile affinché il sistema possa essere considerato un continuo. Le grandezze specifiche risultano indipendenti dalla massa del sistema alla stregua delle grandezze intensive.

grandezze estensive, intensive e specifiche

In generale le grandezze di stato risultano funzioni del punto e del tempo; nel caso particolare in cui le grandezze termodinamiche sono invarianti sia nel tempo sia localmente all'interno del sistema, lo stato è definito stato di equilibrio. Con riferimento a questi ultimi lo studio è notevolmente semplificato ed perciò rivolto ad essi lo studio della termodinamica classica, perciò anche detta termodinamica degli stati di equilibrio.

equilibrio

Non tutte le proprietà che caratterizzano lo stato di equilibrio di un sistema sono indipendenti; l'esperienza, sintetizzata nel postulato di stato, consente di affermare che per un sistema semplice compressibile costituito da una sostanza pura, lo stato intensivo<sup>2</sup> è univocamente definito specificando i valori di due grandezze termodinamiche intensive o specifiche indipendenti. Tale evenienza consentirà di introdurre in forma grafica la descrizione dello stato ricorrendo a piani cartesiani detti diagrammi di stato, sui quali un punto può mettersi in corrispondenza biunivoca con lo stato intensivo del sistema e pertanto ne diventa sinonimo.

postulato di stato

Altre grandezze saranno successivamente introdotte allo scopo di caratterizzare le trasformazioni, ossia i cambiamenti dello stato del sistema nel tempo. L'interesse per le trasformazioni scaturisce dal fatto che è nel corso di queste che il sistema interagisce con l'ambiente scambiando energia. La differenza tra parametri di stato e parametri descrittivi della trasformazione si può anticipare sin d'ora su base intuitiva con l'aiuto della Figura 1 ove è rappresentato lo stato di equilibrio finale "f" cui si perviene distintamente mediante due trasformazioni caratterizzate da stati di equilibrio iniziali, "1" e "2", diversi. Il volume dello stato "f" è una proprietà di stato, cioè indipendente dalla trasformazione ("1"→"f" o "2"→"f" in Figura 1) secondo cui si è pervenuti ad "f" stesso. Di contro lo spostamento non può essere considerato una proprietà di stato, infatti non ha senso parlare di spostamento nello stato "f"; lo spostamento è una caratteristica dipendente dalla trasformazione cui il sistema incorre, "1"→"f" o "2"→"f". Per rimarcare la differenza evidenziata, si parla di funzioni di trasformazione o di grandezze di scambio in contrapposizione al termine proprietà di stato.

trasformazioni, grandezze di scambio

## 2. Energia interna

Nei sistemi termodinamici semplici, oltre all'energia di tipo meccanico, cioè cinetica e potenziale, vi è un'ulteriore forma di energia, detta energia interna, che si può definire come complementare a quella di tipo meccanico rispetto alla energia totale del sistema. L'energia interna rappresenta a livello macroscopico la somma di tutte le

<sup>1</sup> Si conviene di indicare le grandezze intensive con simboli minuscoli, quelle estensive con i simboli maiuscoli e le specifiche con i corrispondenti minuscoli. Fanno eccezione la massa,  $m$ , e la temperatura,  $T$ .

<sup>2</sup> Caratterizzare il sistema in termini di stato intensivo significa descriverne lo stato in termini di sole grandezze intensive e specifiche; il passaggio alla descrizione in termini di stato estensivo, riferito al sistema di massa  $m$ , è agevole conoscendo la massa: le grandezze estensive saranno ottenute moltiplicando le specifiche per la massa, mentre le grandezze intensive restano invariate.

energie presenti a livello microscopico quali l'energia cinetica di traslazione e di rotazione delle molecole, l'energia potenziale e di vibrazione tra le molecole. A differenza di quella meccanica misurabile dall'esterno del sistema, tale forma di energia è suscettibile in principio di misure dall'interno del sistema e ciò ne giustifica il nome. Anche se l'energia interna non è "tangibile" è facile accertarne l'esistenza: si consideri, ad esempio, un gas contenuto in un cilindro-pistone; sia il sistema-gas in uno stato di equilibrio. Per cambiare il suo stato, e quindi in particolare la sua energia interna, il sistema deve interagire con l'ambiente attraverso le sue superfici. Se si pone sul pistone un peso, imponendo una differenza di pressione tra il sistema e l'ambiente, il gas si comprimerà variando il suo volume fino a raggiungere un nuovo stato d'equilibrio. Per il principio di conservazione dell'energia, alla diminuzione dell'energia potenziale del peso che si registra nell'ambiente deve corrispondere necessariamente un trasferimento di energia al sistema-gas, che sarà detto avvenire nel modo lavoro, così da incrementarne l'energia interna. Un altro modo per variare l'energia interna del gas consiste nel porre il cilindro sopra una fiamma, imponendo così una differenza di temperatura tra il sistema e l'ambiente; atteso il raggiungimento di un nuovo stato di equilibrio, è facile accettare che l'energia interna del gas sarà aumentata in conseguenza del raffreddamento della fiamma: si è trasferita energia nel modo calore dall'ambiente-fiamma al sistema-gas. Un ulteriore modo per variare l'energia interna consiste nel trasferire massa, e di conseguenza l'energia a questa connessa, verso o dal sistema: in questo caso si dice che il trasferimento di energia avviene nel modo convettivo. Anche in questo caso, alla variazione di energia in ambiente, dovuta all'acquisto o alla perdita di massa, è naturale associare una corrispondente variazione di energia interna nel sistema.

modi di  
trasferimento  
dell'energia

Le argomentazioni precedenti hanno mostrato che esiste una proprietà estensiva del sistema, detta energia interna, che consente di caratterizzare l'energia totale  $E$  come:  $E = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} + U$ . Le tre modalità di scambio di energia sopra menzionate possono coesistere a seconda del tipo di superficie di controllo che si interpone tra il sistema e l'ambiente. La superficie che racchiude un sistema è detta: superficie adiabatica (diabatica), se non permette (se permette) il trasferimento di energia al sistema nel modo calore; anergodica (ergodica), se impedisce (se permette) il trasferimento nel modo lavoro; impermeabile (permeabile), se non permette (se permette) il passaggio di materia e quindi il trasferimento di energia nel modo convettivo. In particolare il sistema si dirà chiuso o aperto, se la superficie che lo racchiude è impermeabile o permeabile; isolato, se è adiabatica, anergodica e impermeabile. Si noti che dalle precedenti definizioni segue che per i sistemi chiusi è naturale definire il sistema in termini di massa di controllo, di contro per i sistemi aperti è opportuno riferirsi al volume di controllo, come sarà evidenziato al Capitolo 5.

superfici di  
controllo

Stabilitane l'esistenza, rimane da verificare se l'energia è misurabile, se è possibile cioè assegnarle un valore numerico univoco per un fissato stato di equilibrio. Si può misurare l'energia interna del sistema confinandolo con superfici adiabatiche ed impermeabili e misurando il lavoro meccanico fornito per portarlo da uno stato iniziale di equilibrio ad uno finale: l'energia interna del sistema nelle condizioni di equilibrio finali è pari a quella iniziale incrementata del lavoro misurato. Dalla descrizione fatta segue che si può desumere la variazione, non i valori assoluti, di energia interna tra monte e valle di una trasformazione: si vedrà che tale evenienza non è però limitativa ai fini dello studio termodinamico.

### 3. Entropia

La grandezza entropia può essere introdotta in forma assiomatica. Le proprietà che si postuleranno per questa grandezza consentiranno di dedurre risultati congruenti con l'esperienza e sarà tale evenienza a garantire a posteriori la bontà delle ipotesi fatte.

Si consideri un sistema semplice compressibile in condizioni di equilibrio. Il sistema sia racchiuso da pareti impermeabili e costituito da una sostanza pura in una unica fase: gassosa, liquida o solida. Per il sistema in oggetto si assume valido il seguente postulato entropico secondo il quale è possibile definire una grandezza di stato, detta entropia, che:

- 1) è una grandezza estensiva
- 2) è una funzione continua delle sole grandezze estensive del sistema:  $S = S(U, V)$
- 3) esibisce le derivate:

- $\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_V = \frac{1}{T} > 0$ , ove  $T$  è la temperatura termodinamica<sup>1</sup>
- $\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_U = \frac{p}{T}$ , ove  $p$  è la pressione termodinamica

4) è una grandezza non conservativa il cui flusso diffusivo è associato al trasferimento dell'energia nel solo modo calore.

Le proprietà di cui ai punti 1 e 2 implicano una restrizione sul tipo di dipendenza funzionale dell'entropia rispetto alle altre grandezze estensive; in particolare, in quanto grandezza estensiva, la funzione di cui al punto 2 risulta omogenea di primo grado in  $m$ , sicché  $S(U, V) = m S(U/m, V/m) = m s(u, v)$ . Essendo  $S$  funzione monotona crescente in  $U$ , segue che l'entropia è invertibile rispetto all'energia per cui  $U = U(S, V)$ ; quest'ultima funzione deve essere ancora omogenea di primo grado in  $m$  per cui, analogamente all'entropia, dovrà essere  $U(S, V) = m u(s, v)$ .

Il punto 3 definisce la temperatura e la pressione termodinamiche come grandezze intensive, ovvero come funzioni di grado zero in  $m$ , alla stessa stregua delle corrispondenti empiriche. Si dimostrerà in seguito che la temperatura e la pressione termodinamiche esibiscono le stesse proprietà che si riconoscono dall'esperienza alle corrispondenti grandezze empiriche. E' intuitivo che tale evenienza costituisce un ponte tra la struttura teorica che si sta postulando e la realtà che si vuol descrivere. Le proprietà enunciate al punto 4 saranno esaminate nel prossimo Capitolo.

L'esigenza di introdurre la grandezza entropia scaturisce sia dalla necessità di caratterizzare l'evoluzione spontanea dei processi in natura che dalla necessità di contemplare l'esistenza di fenomeni dissipativi, gli attriti, che comportano inevitabilmente la trasformazione di una parte dell'energia in gioco in energia termica non totalmente riconvertibile nella forma di energia di partenza. Ad esempio, l'introduzione dell'entropia consentirà, in accordo con l'esperienza, di negare il passaggio spontaneo di calore da un corpo freddo verso uno caldo e di sancire l'impossibilità della completa conversione di calore in lavoro stabilendo le basi per il funzionamento delle macchine termiche e frigorifere.

### 3.1 Relazioni entropiche

Riferendosi ad un sistema con massa unitaria, per i punti 1 e 2 del postulato entropico può scriversi:

$$s = s(u, v) \quad (1)$$

questa relazione è detta equazione fondamentale in quanto consente una descrizione completa dello stato termodinamico di equilibrio del sistema; infatti da essa è possibile ricavare le grandezze intensive, definite come:

equazione  
fondamentaleequazioni  
di stato

<sup>1</sup> Non sorprende che la temperatura termodinamica è definita positiva se la si relazione, in accordo alla teoria cinetica molecolare, alla energia cinetica delle molecole.



$$\frac{1}{T} = \left. \frac{\partial s}{\partial u} \right|_v = f_1(u, v) \qquad \frac{p}{T} = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_u = f_2(u, v) \quad (2)$$

queste relazioni, dette equazioni di stato, esprimono le grandezze intensive in funzione delle sole grandezze estensive (specifiche) viste come variabili indipendenti. Alternativamente, se sono note le due equazioni di stato si può ricavare l'equazione fondamentale per integrazione a partire dal differenziale della stessa:

prima equazione  
di Gibbs

$$ds = \left. \frac{\partial s}{\partial u} \right|_v du + \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_u dv = \frac{1}{T} du + \frac{p}{T} dv \quad (3)$$

questa equazione è detta prima equazione di Gibbs.

Di fatto si segue questa seconda modalità in quanto si può dimostrare, e verrà fatto in seguito, che temperatura e pressione termodinamiche risultano coincidenti con le corrispondenti grandezze empiriche che sono facilmente misurabili. E' proprio questa evenienza a rendere la struttura teorica concretamente applicabile. Si esegue quindi, una serie di misure sperimentali in differenti stati di equilibrio del sistema coinvolgendo grandezze misurabili (ad esempio  $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$ ) e successivamente si cerca di correlarle per ottenere le equazioni di stato. Queste, più o meno semplici a seconda del grado di approssimazione richiesto, definiscono un modello. Note le equazioni di stato, attraverso integrazione della (3) si perviene alla equazione (1) e quindi alla caratterizzazione dell'entropia a meno di una costante di integrazione. Si rende palese in tal modo una delle maggiori utilità della termodinamica, cioè correlare proprietà non direttamente misurabili a quelle misurabili rendendone possibile la valutazione numerica. Questo discorso è approfondito nei paragrafi 4 e 11.

Di seguito saranno introdotti solo i casi più semplici di modello di gas perfetto e di liquido perfetto o incompressibile, ricordando che in letteratura sono presenti ulteriori modelli per gas e liquidi, spesso di complessità tale da richiedere l'ausilio del calcolatore. La scelta di adottare i modelli più semplici non appare tuttavia penalizzante sul piano concettuale, in quanto la teoria termodinamica si sviluppa indipendentemente dal modello adottato: rinunciando a modelli più evoluti, ancorché più complicati sul piano operativo, si perde in precisione guadagnando però in chiarezza e maneggevolezza.

### 3.2 Relazioni energetiche

Le relazioni di cui al precedente paragrafo sono state ottenute avendo scelto l'entropia come variabile indipendente nell'equazione fondamentale. Stante l'invertibilità dell'entropia con l'energia nella relazione, si può procedere dualmente, assumendo l'energia come variabile indipendente. In tal caso l'equazione fondamentale, assume la forma  $U = U(S, V)$  o, con riferimento allo stato intensivo,  $u = u(s, v)$ . Da questa possono ricavarsi l'equazione di Gibbs e le equazioni di stato in analogia a quanto visto per la rappresentazione entropica:

$$du = \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_v ds + \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_s dv = T ds - p dv \quad (4)$$

dove

$$T = \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_v = f_3(u, v) \qquad -p = \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_s = f_4(u, v) \quad (5)$$

Sarà mostrato al paragrafo 9 come le definizioni di grandezze intensive di cui alle equazioni (5) sono del tutto equivalenti alle (2).



Una interessante relazione tra le grandezze termodinamiche può ottenersi invocando l'omogeneità della funzione  $U$  rispetto alla massa. Derivando rispetto ad  $m$  la equazione fondamentale riscritta come  $m u(s, v) = U(S, V)$  si ottiene

$$u(s, v) = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V \frac{\partial S}{\partial m} + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S \frac{\partial V}{\partial m} = T s - p v \quad (6)$$

relazione di  
Eulero

La relazione è detta relazione di Eulero per le funzioni omogenee di primo grado. Si può dimostrare che l'espressione può essere generalizzata affermando che una funzione omogenea di ordine  $n$  si può scrivere come prodotto di  $n$  per la sommatoria delle derivate prime moltiplicate per le variabili indipendenti ad esse associate. La relazione precedente suggerisce di raggruppare le grandezze termodinamiche a coppie, coppie coniugate, una intensiva e l'altra estensiva, tali che il loro prodotto sia omogeneo ad una energia. In un sistema semplice le coppie coniugate sono: temperatura ed entropia, pressione e volume. Questo spiega perché nel rappresentare gli stati termodinamici su appositi diagrammi, si scelgano di preferenza i diagrammi  $Ts$  e  $pv$ . Dualmente si possono definire le coppie coniugate nella rappresentazione entropica. Se si differenzia la relazione di Eulero e si tiene conto dell'equazione di Gibbs è immediato pervenire ad una ulteriore relazione, detta di Gibbs-Duhem, intercorrente tra le variabili intensive all'equilibrio:

$$s dT - v dp = 0 \quad (7)$$

relazione di  
Gibbs-Duhem

## 4. Potenziali termodinamici



Come più volte sottolineato, un'equazione di stato non presenta il contenuto informativo di un'equazione fondamentale che, d'altra parte, è espressa in termini di variabili estensive,  $u$  ed  $s$ , non direttamente misurabili. La questione della misurabilità è fondamentale perché la teoria costruita sin qui dia dei risultati quantitativi, sebbene da questi prescindano la validità logica della teoria stessa. Ci si pone dunque il problema di preservare il contenuto informativo proprio di un'equazione fondamentale esprimendolo però in termini di variabili intensive, ovvero in termini di derivate della variabile estensiva dipendente.

Da un punto di vista matematico il problema, su di un piano bidimensionale, corrisponde a descrivere una curva,  $y = f(x)$ , in termini di involuppo di rette ad essa tangenti, individuabili dal coefficiente angolare  $y'$  e dall'intercetta  $z$ , Figura 2. È il caso di osservare che costruirsi la  $y' = f'(x)$  allo scopo di eliminare la  $x$  per ottenere  $y$  in funzione della  $y'$  darebbe luogo ad una equazione differenziale risolvibile rispetto ad  $y(x)$  a meno di una costante arbitraria e, quindi, tale posizione non risulta utile per gli scopi prefissati. Si consideri, dunque, un punto del piano di coordinate  $(x_i, y_i)$ : esiste un'unica retta tangente alla curva passante per tale punto individuata dal coefficiente angolare  $y_i'$  e dall'intercetta  $z_i$ . Vi è quindi una corrispondenza biunivoca tra la coppia  $(x_i, y_i)$  e la coppia  $(y_i', z_i)$ . Allo stesso modo in cui la curva  $y(x)$  si può pensare descritta da una successione di punti  $(x_i, y_i)$ , la coppia  $(y_i', z_i)$  individua una famiglia di rette di equazione  $z = z(y')$ , del tutto equivalente ad  $y(x)$  stante la relazione di biunivocità evidenziata in precedenza.

Per essere operativi, nota la curva  $y(x)$ , occorre determinare la intercetta  $z$  staccata dalla tangente al generico punto  $(x, y)$ :

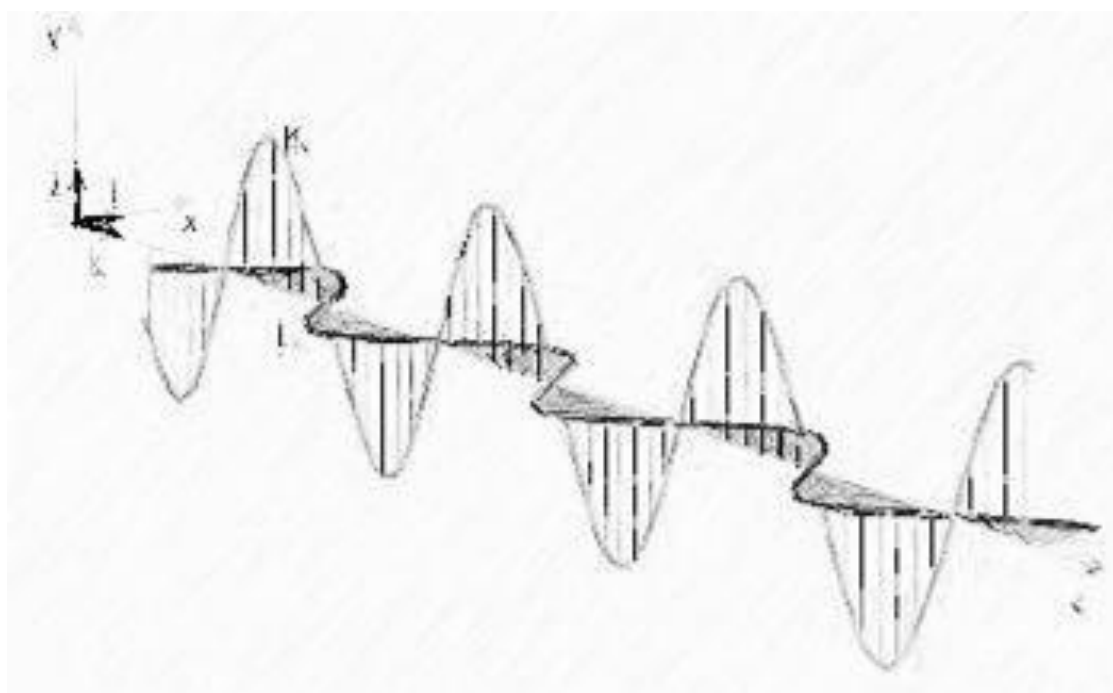
$$z(y') = y - y' x \quad (8)$$

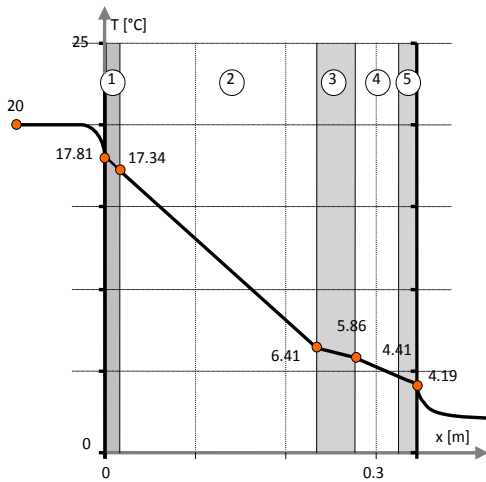
trasformata di  
Legendre

La funzione  $z$  è detta trasformata di Legendre della  $y$ .

Il problema inverso di determinare  $y(x)$  nota la  $z(y')$  si risolve derivando la (8) rispetto a  $y'$  per ottenere  $x$ ,

**Parte II**  
Trasmissione  
del Calore





struttura	h	spessore [m]	k [W/mK]	r [m²K/W]	T [°C]
1/h <sub>i</sub>	10	-	-	0.10	17.81
1		0.015	0.70	0.02	17.34
2		0.22	0.44	0.50	6.41
3		0.04	1.60	0.03	5.86
4		0.06	0.90	0.07	4.41
5		0.01	1.00	0.01	4.19
1/h <sub>e</sub>	10	-	-	0.10	2
totali		0.345		0.82	

### 1.3 Lastra piana con generazione interna

Si consideri una lastra piana di spessore  $2L$  in condizioni stazionarie e con generazione uniforme,  $\dot{u}_{gen}$ . Tale situazione descrive, ad esempio, il riscaldamento dovuto al passaggio di corrente elettrica per effetto Joule, a reazioni chimiche o nucleari, e trova importanti riscontri applicativi nello studio dei riscaldatori elettrici e, nel caso di geometria cilindrica, dei cavi conduttori di corrente elettrica. L'analisi di quest'ultimo caso può essere condotta sulla falsariga di quello in esame ed è lasciato al lettore.

#### Condizioni al contorno con simmetria termica

Si inizia con il considerare lo schema di Figura 5 ove la lastra è raffreddata su entrambe le facce da una corrente fluida di caratteristiche note,  $h$  e  $T_f$ ; considerando la simmetria di carico e geometrica, si può limitare lo studio ad una sola metà della lastra traducendo la condizione di simmetria con una di adiabaticità, entrambe caratterizzate da tangente nulla, Figura 5.

Traducendo in equazioni quanto appena descritto, l'equazione differenziale e le relative condizioni al contorno sono:

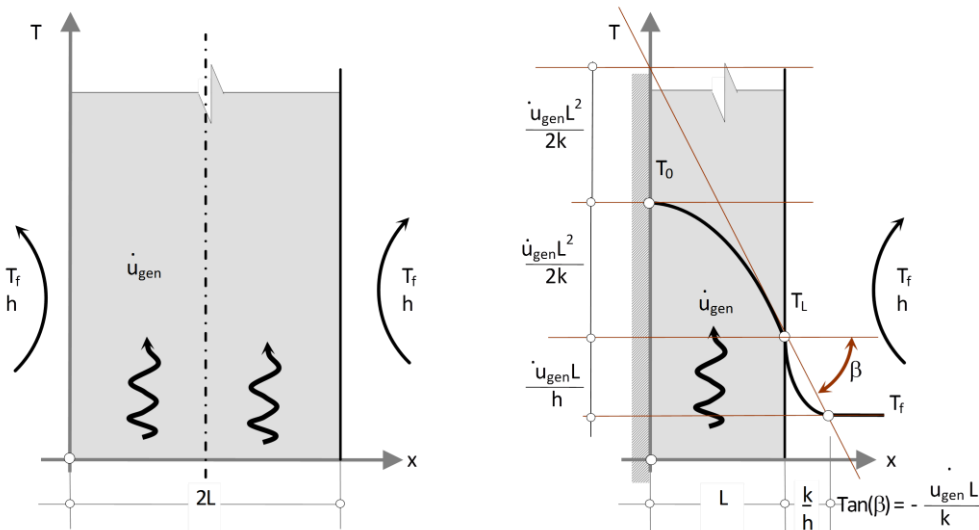


Figura 5  
lastra piana con generazione

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{u}_{\text{gen}}}{k} = 0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h(T(L) - T_f) \end{cases} \quad (17)$$

La soluzione del problema,

$$T(x) = \frac{\dot{u}_{\text{gen}} L^2}{2k} \left( 1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{\dot{u}_{\text{gen}} L}{h} + T_f \quad (18)$$

mostra che la temperatura varia secondo legge parabolica con massimo sulla mezzera della lastra e minimo ad  $x = L$ . Dalla (18) segue anche che se  $k \rightarrow \infty$  o se  $L \rightarrow 0$  la caduta di temperatura nella lastra assume un valore nullo; dalla stessa equazione si evince che se  $h \rightarrow \infty$  si annulla la caduta di temperatura all'interfaccia solido-fluido,  $T_L - T_f$ . La costruzione grafica riprodotta in Figura 5 evidenzia quanto constatato.

Il flusso termico locale, calcolabile dalla legge di Fourier, è variabile linearmente lungo la lastra:

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = \dot{u}_{\text{gen}} x \quad (19)$$

Il flusso termico uscente attraverso la faccia ad  $x = L$  può calcolarsi dalla precedente espressione oppure con riferimento ad un bilancio esteso ad un volume di controllo che avvolga tutta la lastra:

$$\dot{Q} = A \cdot L \cdot \dot{u}_{\text{gen}} \quad (20)$$

avendo indicato con  $A$  l'area normale al passaggio del flusso.

### Condizioni al contorno senza simmetria termica

Si consideri il caso rappresentato in Figura 6 in cui la lastra di spessore  $L$  sia soggetta a condizioni al contorno non simmetriche, ad esempio, di primo tipo:

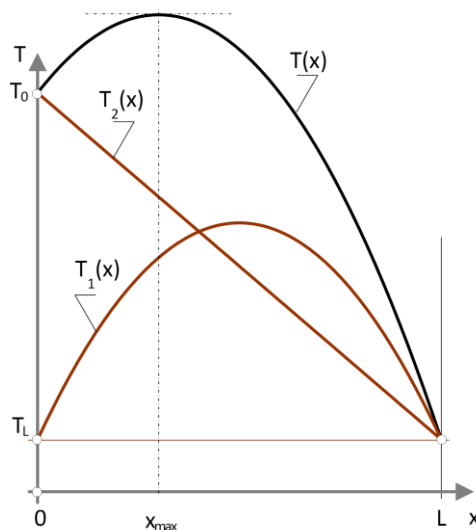


Figura 6  
generazione con  
condizioni al  
contorno  
asimmetriche

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{u}_{\text{gen}}}{k} = 0 \\ T(0) = T_0 \\ T(L) = T_L \end{array} \right. \quad (21)$$

Il campo di temperatura nella lastra è determinato da due effetti, lo squilibrio di temperatura sul bordo e la generazione interna. Stante la linearità del problema in esame, la soluzione può ricercarsi come somma di due soluzioni parziali, l'una che si fa carico della non omogeneità nell'equazione differenziale, cioè della generazione, e l'altra che si fa carico dello squilibrio sul bordo, cioè delle disomogeneità delle condizioni al contorno; si assume quindi che  $T(x) = T^{(1)}(x) + T^{(2)}(x)$ . La struttura ipotizzata per la soluzione è soluzione delle precedenti equazioni se risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\dot{u}_{\text{gen}}}{k} = 0 \\ T^{(1)}(0) = 0 \\ T^{(1)}(L) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x^2} = 0 \\ T^{(2)}(0) = T_0 \\ T^{(2)}(L) = T_L \end{array} \right. \quad (22)$$

La soluzione per  $T^{(1)}$  è fornita dalla (18), ove si sostituisca  $L/2$  ad  $L$  e  $x - L/2$  ad  $x$  con  $h \rightarrow \infty$  e  $T_f = 0$ ; risulta:  $T^{(1)}(x) = (L - x) \dot{u}_{\text{gen}} x / (2k)$ . La soluzione per  $T^{(2)}$  è data dalla (3). La asimmetria si evidenzia valutando la collocazione del massimo del profilo di temperatura: si trova  $x_{\text{max}} = L/2 + (T_L - T_0) k / (\dot{u}_{\text{gen}} L)$ ; ne consegue che il massimo cade nella metà della lastra la cui faccia esposta è a temperatura più elevata.

Tenendo presente la sovrapposizione dei due campi di temperatura, il flusso termico può riguardarsi come somma di un termine costante più un termine variabile linearmente, quest'ultimo positivo per  $x > L/2$  e negativo in caso contrario; in particolare, i flussi sulle facce ad  $x = 0$  e  $x = L$  valgono rispettivamente:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0 = k \frac{T_0 - T_L}{L} - \frac{\dot{u}_{\text{gen}} L}{2} \quad -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_L = k \frac{T_0 - T_L}{L} + \frac{\dot{u}_{\text{gen}} L}{2} \quad (23)$$

Si nota che sulla faccia ad  $x = 0$  il flusso può in generale assumere segno qualsiasi, mentre sull'altra faccia il flusso è certamente uscente.

## 2. Il processo di adimensionalizzazione

Definito il problema tramite l'equazione differenziale e le condizioni al contorno, è conveniente procedere alla fase di adimensionalizzazione. Alla lettera, adimensionalizzare significa togliere le dimensioni; quest'operazione implica rapportare le variabili dipendenti ed indipendenti del problema con altre ad esse omogenee dimensionalmente che sono scelte come riferimento. Queste ultime vanno selezionate nell'ambito del problema in esame perché le variabili adimensionali siano significative. Ad esempio, se è in esame una tubazione se ne può misurare la lunghezza,  $L$ , in diametri di tubazione avendo scelto come riferimento il diametro,  $D$ . Si noti che l'aver scelto come riferimento il diametro consente di stabilire quanto è "snella" la tubazione: è immediato concludere che se  $L/D \gg 1$  la tubazione è lunga. Ad analoga conclusione non si può giungere se, ad esempio, è nota la lunghezza in metri. In altre parole, la tubazione può essere "lunga o corta" in dipendenza del contesto esaminato; una adimensionalizzazione corretta, cioè la scelta di una lunghezza di riferimento si-

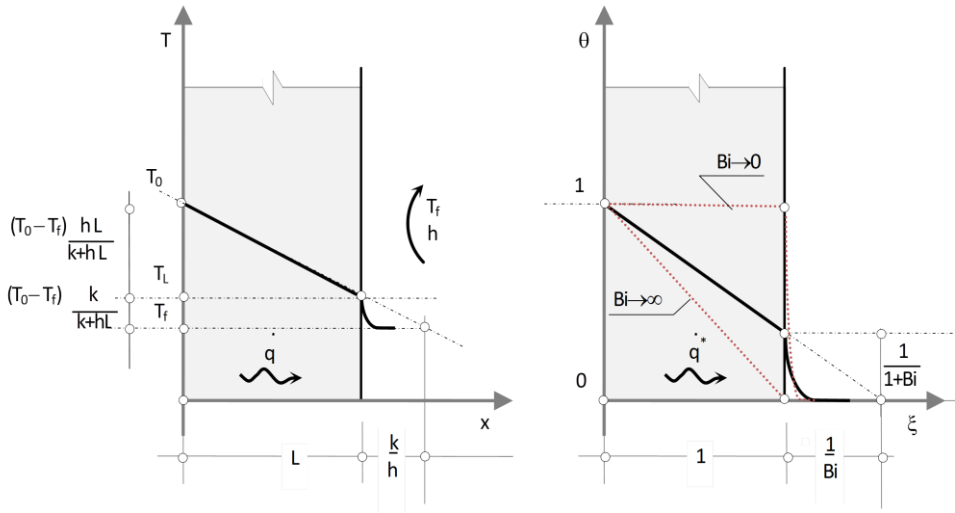


Figura 7  
problema  
dimensionale vs  
adimensionale

gnificativa, consente di dissolvere il dubbio.

Nel corso del processo di adimensionalizzazione le proprietà che figurano nel sistema di equazioni che definisce il problema e le grandezze assunte come riferimento sono raggruppate in un numero ridotto di parametri adimensionali; ciò consente di valutare appieno la dipendenza funzionale tra le varie grandezze oltre che una più comoda manipolazione del modello. Inoltre, come sarà chiaro in seguito, i parametri adimensionali possono dar luogo a notevoli semplificazioni nell'analisi del problema esaminato se la scelta delle grandezze di riferimento è fatta in maniera tale che le grandezze adimensionali risultano di ordine di grandezza unitario.

Si nota, infine, che non sempre è facile identificare a priori delle grandezze di riferimento significative per il problema in esame: queste saranno sovente esplicitate invocando la necessità di semplificare sul piano formale la descrizione del problema; l'analisi successiva consentirà di attribuire a tali grandezze il significato che gli compete sul piano fisico.

Le summenzionate caratteristiche del processo di adimensionalizzazione verranno illustrate nei prossimi paragrafi facendo riferimento a due esempi. Riguardo a questi ultimi, e più in generale in tutto il testo, si conviene di indicare le grandezze adimensionali con simboli dell'alfabeto greco o minuscoli, mentre le corrispondenti maiuscole indicheranno le grandezze dimensionali.

## 2.1 Riduzione delle variabili e nuovi parametri adimensionali

Si consideri, ad esempio, il caso di una lastra piana in condizioni stazionarie soggetta a condizioni al contorno del primo tipo sulla faccia ad  $x = 0$  e del terzo su quella ad  $x = L$ , Figura 7. Il problema si formalizza come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ T(0) = 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h(T(L) - T_f) \end{array} \right. \quad (24)$$

Dall'analisi delle precedenti equazioni appare che la funzione temperatura dipende da sei parametri:  $T = T(x, k, L, h, T_f, T_0)$ ; ciò suggerisce di condurre il processo di adimensionalizzazione. Occorre perciò individuare nell'ambito del problema in esa-